Tutorial
MT-b5

Matemática 2006

Tutorial Nivel Básico

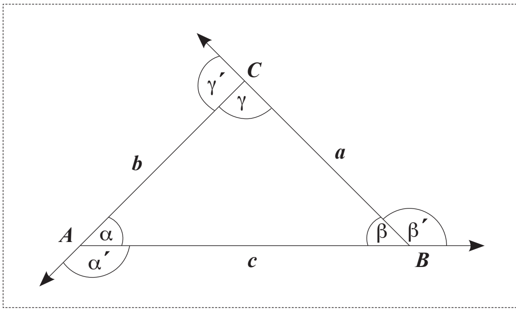
Triángulos I

CEPECH
ESPECIALISTAS DE LA PSU
Grupo Educacional Cepech

Triángulos 1

Marco Teórico

1. Definición: polígono de 3 lados.



2. Elementos primarios:

a) Vértices: A, B, C

b) Lados: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$

Se cumple que:

i) La suma de dos lados es siempre mayor que el tercer lado.
$a + b > c$
$b + c > a$
$a + c > b$

ii) La diferencia positiva de dos lados es siempre menor que el tercer lado.

c) Ángulos interiores: $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$

Se cumple que:

i) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

ii) A mayor ángulo se opone mayor lado y a menor ángulo se opone menor lado.
Ejemplo: $\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow a > b > c$

d) Ángulos exteriores:

Se cumple que:

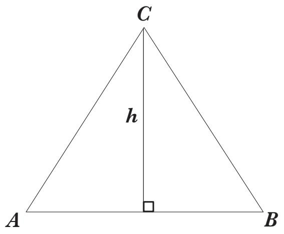
i) $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

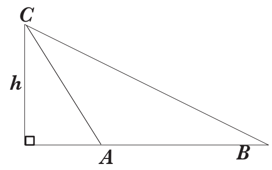
ii) Un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.
$\alpha' = \beta + \gamma$
$\beta' = \alpha + \gamma$
$\gamma' = \alpha + \beta$

3. Elementos secundarios:

a) Altura: h

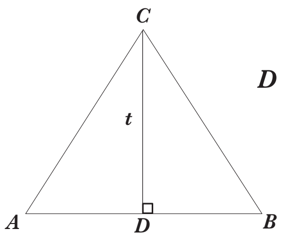
Perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.
Ortocentro (H): punto de intersección de las alturas.



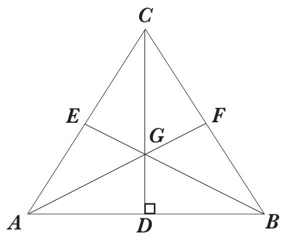


b) Transversal de gravedad: t

Trazo que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
Centro de gravedad (G): punto de intersección de las transversales, las divide en la razón de $2 : 1$



D : punto medio

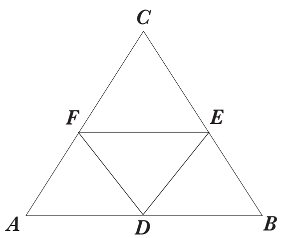


D, E, F :
puntos medios
G : centro
de gravedad

$$\overline{GD} = x \,, \quad \overline{CG} = 2x$$

c) Mediana:

Trazo que une los puntos medios de dos lados consecutivos.
Cada mediana es paralela al lado opuesto y mide la mitad.



D, E, F: puntos medios $\Rightarrow$

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AB}}{2} \,, \quad \overline{FD} = \frac{\overline{BC}}{2} \,, \quad \overline{ED} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

$$\overline{EF} \,//\, \overline{AB} \,, \overline{DE} \,//\, \overline{AC} \,, \ \overline{FD} \,//\, \overline{BC}$$

Además se forman 4 triángulos iguales (congruentes).

d) Bisectriz: b

Divide al ángulo en dos partes iguales.
Incentro: punto de intersección de las bisectrices, que equidista de los tres lados y corresponde al centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

4. *Clasificación de los triángulos según sus ángulos:*

- Acutángulo: 3 ángulos agudos
- Rectángulo: 1 ángulo recto
- Obtusángulo: 1 ángulo obtuso

5. *Clasificación de los triángulos según sus lados:*

- Escaleno: 3 lados distintos.
  Sus 3 ángulos son distintos.
- Isósceles: 2 lados iguales (el lado distinto se llama base).
  Los ángulos ubicados en la base son iguales.
- Equilátero: 3 lados iguales.
  Sus 3 ángulos son iguales.

6. *Generalidades:*

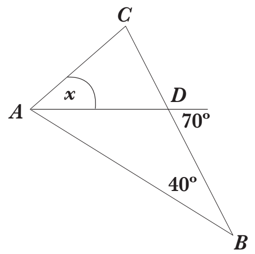
i) Área = $\dfrac{\textit{base} \cdot \textit{altura}}{2}$

Δ equilátero: Área = $\dfrac{(\textit{lado})^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $\qquad h = \dfrac{\textit{lado} \cdot \sqrt{3}}{2}$

ii) Perímetro: suma de sus lados.

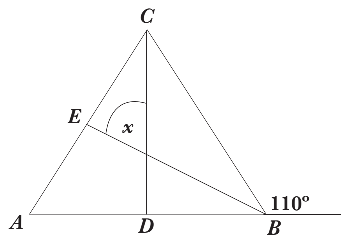
Ejercicios

1. $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC$, $x = ?$



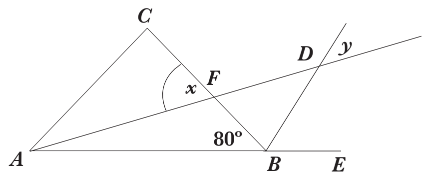
   A) 30°
   B) 40°
   C) 70°
   D) 110°
   E) Falta información

2. $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{BE}$ bisectriz del $\angle CBA$ y $\overline{CD}$ bisectriz del $\angle ACB$, $x = ?$



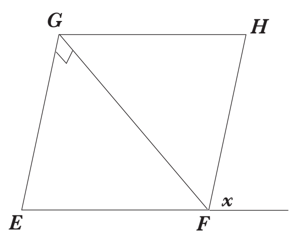
   A) 20°
   B) 40°
   C) 55°
   D) 70°
   E) Otro valor

3. $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC$ y $\overline{BD}$ bisectriz del $\angle EBC$, $x + y = ?$



   A) 50°
   B) 60°
   C) 90°
   D) 100°
   E) 130°

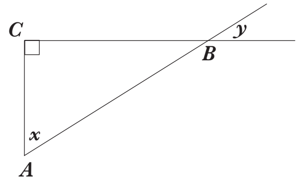
4. $\overline{EG} = \overline{GF} = \overline{GH} = \overline{FH}$, $x = ?$



   A) 45°
   B) 60°
   C) 75°
   D) 105°
   E) 110°

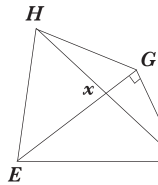
5. Si en el $\Delta\, ABC$ se tiene que $38° < x < 46°$, entonces:

A) $38° < y < 46°$
B) $44° < y < 52°$
C) $84° < y < 96°$
D) $134° < y < 142°$
E) Ninguno de ellos



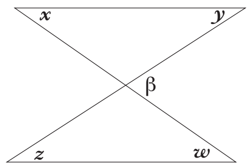
6. $\Delta\, EGH$ equilátero, $\Delta\, EGF$ isósceles, x = ?

A) 45°
B) 60°
C) 75°
D) 105°
E) 120°



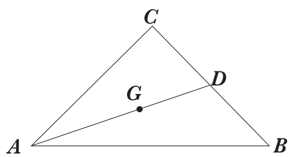
7. $x + y + z + w$ en función de β es:

A) 2β
B) 4β
C) 180° + β
D) 360° - 2β
E) Falta información



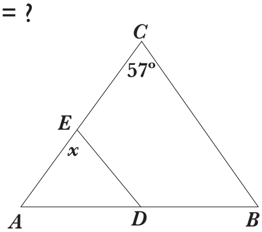
8. $\overline{AD}$ = 9 cm, G centro de gravedad, D punto medio, $\overline{AG}$ = ?

A) 3 cm
B) 4 cm
C) 4,5 cm
D) 5 cm
E) 6 cm



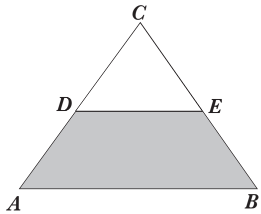
9. D, E puntos medios de sus lados respectivos entonces x = ?

A) 33°
B) 57°
C) 90°
D) 123°
E) Ninguno de ellos

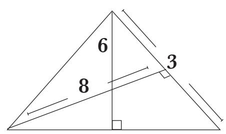


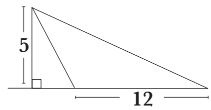
10. D, E puntos medios de sus lados respectivos, área del $\Delta\, ABC = 16$ cm^2. Determine el área achurada.

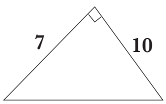
A) 4 cm^2
B) 6 cm^2
C) 8 cm^2
D) 12 cm^2
E) Falta información

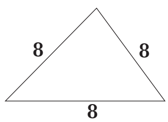


11. Determine el área de los siguientes triàngulos:

a)


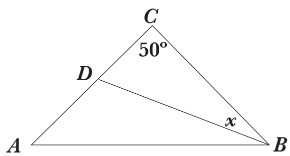
b)


c)


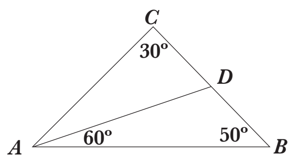
d)


12. $\Delta\, ABC$ isosceles de base $\overline{AC}$, D punto medio, x = ?

A) 25°
B) 40°
C) 50°
D) 65°
E) 80°

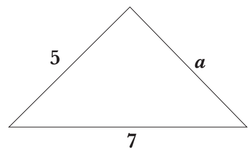


13. Determine el lado mayor entre los triángulos ACD y ABD.

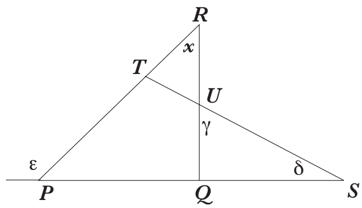


14. Determine el menor valor entero que puede tomar " a " para que el triángulo exista.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



15. Determine x en función de γ , δ y ε

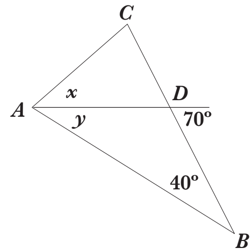


Respuestas

Preg.	Alternativa
1	A
2	D
3	E
4	C
5	B
6	C
7	A
8	E
9	B
10	D
11	a) 12 b) 30 c) 35 d) $16\sqrt{3}$
12	B
13	$\overline{AC}$
14	C
15	$x = \varepsilon - \gamma - \delta$

Solucionario

1. La alternativa correcta es la letra A)

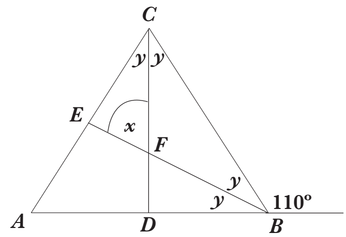


En $\Delta\, ADB$

$70° = y + 40°$ ($\angle$ exterior)
$70° - 40° = y$ (Despejando y)
$30° = y$

Como $\overline{AD}$ bisectriz $\Rightarrow x = y$
$\therefore\ x = 30°$

2. La alternativa correcta es la letra D)



Como BE bisectriz
$\Rightarrow \angle\, CBE = y$
$\angle\, EBA = y$

$y + y + 110° = 180°$ ($\angle$ extendido)

$2y = 180° - 110°$ (Despejando y)

$2y = 70°$

$y = \dfrac{70°}{2}$ (Simplificando)

$y = 35°$

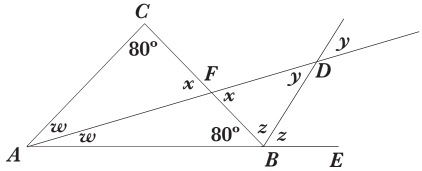
Como $\overline{AC} = \overline{AB} \Rightarrow \angle\, ACB = \angle\, CBA$ y como $\overline{CD}$ bisectriz $\Rightarrow \angle\, ACD = y$, $\angle\, DCB = y$

x , $\angle$ exterior del $\Delta\, FBC$

$\Rightarrow\ x = y + y$ (Reemplazando y)
$x = 35° + 35°$
$x = 70°$

$\therefore\ x = 70°$

3. La alternativa correcta es la letra E)



Como $\overline{AC} = \overline{AB} \Rightarrow \angle ACB = 80°$
Como $\overline{BD}$ bisectriz
$\angle DBC = z$
$\angle EBD = z$

$80° + z + z = 180°$ ($\angle$ extendido)
$2z = 180 - 80$ (Despejando z)
$2z = 100$
$z = \dfrac{100}{2}$ (Simplificando)
$z = 50°$

Como $\overline{AD}$ bisectriz
$\angle BAF = \angle FAC = w$
En ΔABC se tiene que:
$w + w + 80° + 80° = 180°$ (Suma de los $\angle$s interiores)
$2w + 160° = 180°$ (Despejando w)
$2w = 180 - 160$
$2w = 20$
$w = \dfrac{20}{2}$
$w = 10°$

x , $\angle$ exterior del ΔAFB

$\Rightarrow x = w + 80°$ (Reemplazando w)
$x = 10° + 80°$
$x = 90°$

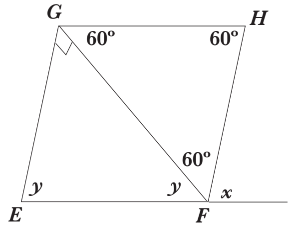
Además $x = \angle BFD$ (Opuestos por el vértice)
$y = \angle FDB$ (Opuestos por el vértice)

En ΔBFD se tiene que:

$x + y + z = 180°$ (Suma de los $\angle$s interiores)
$90° + y + 50° = 180°$ (Reemplazando x,z)
$y + 140° = 180°$ (Despejando y)
$y = 180 - 140$
$y = 40°$

Nos piden $x + y$ (Reemplazando x,y)
$90° + 40° = 130°$
$\therefore\ x + y = 130°$

4. La alternativa correcta es la letra C)



Como $\overline{EG} = \overline{GF} \Rightarrow \angle FEG = \angle GFE = y$

$\therefore y = 45°$

Como $\overline{GF} = \overline{GH} = \overline{FH} \Rightarrow \Delta\, GHF$ equilátero $\Rightarrow$

$\angle HFG = 60°$, $\angle FGH = 60°$, $\angle GHF = 60°$

$\Rightarrow x + y + 60° = 180°$ ($\angle$ extendido)

$x + 45° + 60° = 180°$ (Reemplazando y)

$x + 105° = 180°$ (Despejando x)

$x = 180 - 105$

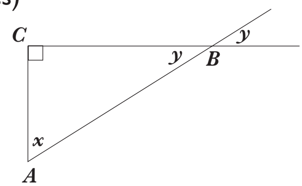
$x = 75$

$\therefore\ x = 75°$

5. La alternativa correcta es la letra B)

$\angle y = \angle CBA$ (Opuestos por el vértice)

$x + y + 90° = 180°$ (Suma de los $\angle$s interiores)



$x + y = 180 - 90$

$x + y = 90°$

$\Rightarrow$ Si $x = 38°$

$x + y = 90°$ (Reemplazamos x)

$38° + y = 90°$ (Despejando y)

$y = 90 - 38$

$y = 52°$

Si x = 46°

$x + y = 90°$ (Reemplazamos x)

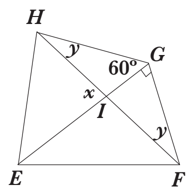
$46° + y = 90°$ (Despejando y)

$y = 90 - 46$

$y = 44$

$\therefore\ 44° < y < 52°$

6. La alternativa correcta es la letra C)



Como $\Delta\, GHE$ equilátero $\Rightarrow$

$\overline{HE} = \overline{GH} = \overline{EG} \Rightarrow \angle HGE = 60°$

Como $\Delta\, EGF$ isósceles rectángulo $\Rightarrow$

$\overline{EG} = \overline{GF}$ (La única posibilidad es que la base sea $\overline{EF}$)

$\Rightarrow \overline{HG} = \overline{GF}$

$\Rightarrow\ \Delta\, HGF$ isósceles de base $\overline{HF}$

$\Rightarrow \angle\, FHG = y,\quad \angle\, GFH = y$

Además $\angle\, HGF = 60° + 90° = 150°$

$\Rightarrow$ En $\Delta\, HGF$ se tiene que:

$y + 150° + y = 180°$ (Suma de los $\angle$s interiores)

$2y + 150° = 180°$ (Despejando y)

$2y = 180° - 150°$

$2y = 30$

$y = \dfrac{30}{2}$ (Simplificando)

$y = 15°$

Como x es $\angle$ exterior del $\Delta\, IHG$

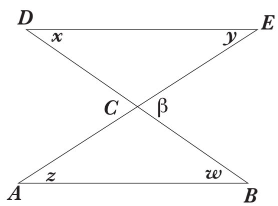
$\Rightarrow x = 60° + y$ (Reemplazando y)

$x = 60° + 15°$

$x = 75°$

$\therefore\ x = 75°$

7. La alternativa correcta es la letra A)



β : $\angle$ exterior del $\Delta\, DEC$ y del $\Delta\, ABC$

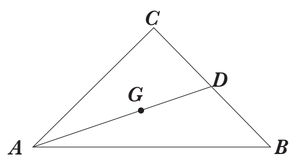
$\Rightarrow \beta = x + y$

$\beta = z + w$

$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{x + y}_{\beta} + \underbrace{z + w}_{\beta}}_{2\beta}$ (Reemplazando x,y,z,w)

$\therefore\ x + y + z + w = 2\beta$

8. La alternativa correcta es la letra E)



Como G es centro de gravedad y $\overline{AD}$ transversal (D punto medio)

$\Rightarrow \overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$

Sabemos que $\overline{AD} = 9$

$\Rightarrow \overline{AG} + \overline{GD} = 9$ y

$\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ (Escribimos la otra notación)

$\dfrac{\overline{AG}}{2} = \dfrac{\overline{GD}}{1} = k$ (Separando en razones)

$\dfrac{\overline{AG}}{2} = k \Rightarrow \overline{AG} = 2k$ (Despejando $\overline{AG}$)

$\dfrac{\overline{GD}}{1} = k \Rightarrow \overline{GD} = k$ (Despejando $\overline{GD}$)

Como $\overline{AG} + \overline{GD} = 9$ (Reemplazamos)

$2k + k = 9$ (Despejando k)

$3k = 9$

$k = \dfrac{9}{3}$ (Simplificando)

$k = 3$

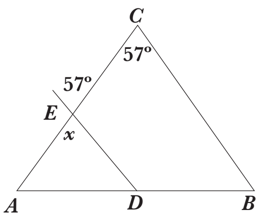
$\overline{AG} = 2k$ y $k = 3$ (Reemplazamos k)

$\overline{AG} = 2 \cdot 3$

$\overline{AG} = 6$

$\therefore\ \overline{AG} = 6$ **cm**

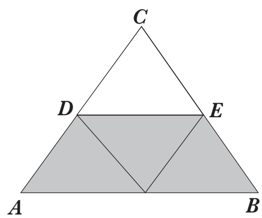
9. La alternativa correcta es la letra B)



Como E y D son puntos medios
$\Rightarrow \overline{ED}$ mediana $\Rightarrow \overline{ED} \parallel \overline{BC}$
Trasladando 57° a su alterno interno
$\Rightarrow x = 57°$ (opuestos por el vértice)

$\therefore\ x = 57°$

10. La alternativa correcta es la letra D)



Como D, E puntos medios $\Rightarrow \overline{DE}$ mediana
Al trazar las 3 medianas sabemos que se forman 4 Δs iguales

$\Rightarrow$ Área $\Delta\, AFD$ = Área $\Delta\, FBE$ = Área $\Delta\, DFE$ = Área $\Delta\, CDE = \dfrac{1}{4}$ Área $\Delta\, ABC$

Área ΔABC = 16 cm^2

La parte achurada consta de 3 Δs.

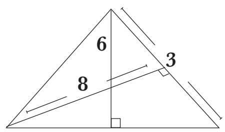
$\Rightarrow$ Area achurada = $\dfrac{3}{4}$ Area Δ ABC (Reemplazamos)

= $\dfrac{3}{4} \cdot 16$ (Simplificando)

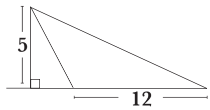
= 12

Area achurada =12 cm^2

11. a)



b)



Utilizamos la altura que mide 8 ya que cae en la base que es 3. No nos sirve la altura que mide 6 ya que no sabemos cuánto mide su base.

Área = $\dfrac{base \cdot altura}{2}$

(reemplazamos)

Área = $\dfrac{3 \cdot 8}{2}$ (simplificando)

= 12

$\therefore$ Área = 12

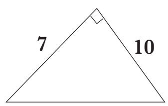
Área = $\dfrac{base \cdot altura}{2}$ (Reemplazamos)

Área = $\dfrac{12 \cdot 5}{2}$ (Simplificando)

Área = 30

$\therefore$ Área = 30

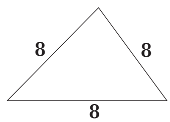
c)



Nota: los lados de un Δ rectángulo se llaman catetos e hipotenusa, donde la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

Como es Δ rectángulo, el área se puede calcular como

d)



Este Δ es equilátero, ya que tiene sus 3 lados iguales.

$\dfrac{cateto1 \cdot cateto2}{2}$ (Reemplazamos)

$\Rightarrow$ Area $= \dfrac{7 \cdot 10}{2}$ (Simplificando)

$= 35$

$\therefore$ Área $= 35$

$\Rightarrow$ Area $= \dfrac{(lado)^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (Reemplazamos)

Área $= \dfrac{8^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (Orden operaciones)

$= \dfrac{64}{4} \cdot \sqrt{3}$ (Simplificando)

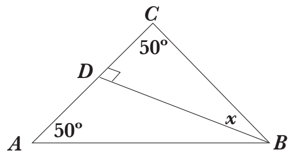
$= 16\sqrt{3}$

$\therefore$ Área $= 16\sqrt{3}$

12. La alternativa correcta es la letra B)

Como $\Delta\, ABC$ isósceles de base $\overline{AC} \Rightarrow \angle\, BAC = 50°$

Además $\overline{DB}$ transversal de gravedad que cae en la base $\Rightarrow \overline{DB}$ bisectriz y altura (las rectas notables que caen en la base coinciden)



En $\Delta\, CDB$ se tiene que:

$x + 90° + 50° = 180°$ (Suma de los $\angle$s interiores)

$x + 140° = 180°$ (Despejando x)

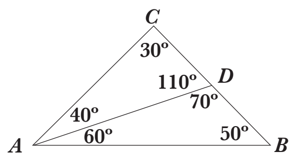
$x = 180 - 140$

$x = 40$

$\therefore\ x = 40°$

13. Para determinar el lado mayor de un triángulo, debemos encontrar el $\angle$ mayor. Entonces debemos determinar el valor de todos los $\angle$ s interiores.

En $\Delta\, ADB$ se tiene que:



$60° + 50° + \angle\, ADB = 180°$ (Suma de los $\angle$s interiores)

$\angle ADB + 110° = 180°$ (Despejando $\angle\, ADB$)

$\angle\, ADB = 70°$

Además 70° $\angle$ exterior del $\Delta\, ADC$

$\Rightarrow\ 70° = \angle\, DAC + 30°$ (Despejando $\angle\, DAC$)

$70 - 30 = \angle\, DAC$

$40° = \angle\, DAC$

Por otro lado: $70° + \angle\ CDA = 180°$ (∠ extendido)
$\angle\ CDA = 180 - 70$ (Despejando $\angle\ CDA$)
$\angle\ CDA = 110°$

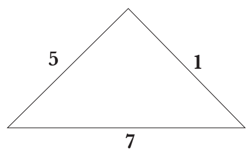
$\Rightarrow$ el ángulo mayor es $\underline{110°}$, el lado opuesto a $110°$ es $\overline{AC}$
$\therefore$ El lado mayor es $\overline{AC}$

14. La alternativa correcta es la letra C)

Para determinar el valor que puede tomar " a " , debemos utilizar que la suma de 2 lados debe ser siempre mayor que el tercer lado.

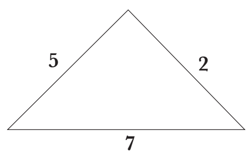
Empezamos por el entero más pequeño, que en este caso es 1 (no puede ser negativo ni 0)

Si $a = 1$



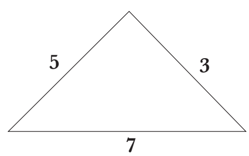
$5 + 1 = 6$
Pero 6 no es mayor que 7
$\therefore\ a \neq 1$

Si $a = 2$



$5 + 2 = 7$
Pero 7 no es mayor que 7
$\therefore\ a \neq 2$

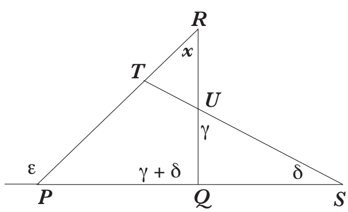
Si $a = 3$



$5 + 3 = 8 \quad , 8 > 7$
$5 + 7 = 12 \quad , 12 > 3$
$3 + 7 = 10 \quad , 10 > 5$

$\therefore$ El menor entero que puede tomar "a" es 3.

15.



$\angle\ RQP$ exterior del $\Delta\ QSU \Rightarrow \angle\ RQP = \gamma + \delta$
$\varepsilon\ \angle$ exterior del $\Delta\ PQR$
$\Rightarrow \varepsilon = x + \gamma + \delta$ (Despejando x)
$\varepsilon - \gamma - \delta = x$
$\therefore\ x = \varepsilon - \gamma - \delta$