Tutorial
MT-b8

# Matemática 2006

## Tutorial Nivel Básico

Triángulos II

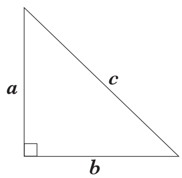
CEPECH
ESPECIALISTAS DE LA PSU
Grupo Educacional Cepech

# Triángulos II

## Marco teórico:

### *1. Triángulo rectángulo:*

Es aquel triángulo que posee un ángulo recto. Cada uno de los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo se llama **cateto**, mientras que el lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa**. Además en un triángulo rectángulo cada cateto puede ser considerado como base y como altura.

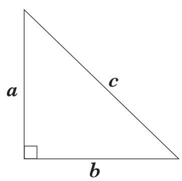



$a$, $b$ son catetos y $c$ es hipotenusa

$$\text{Área} = \frac{a \cdot b}{2}$$

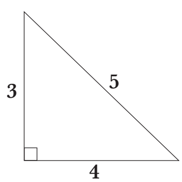
### *2. Teorema de Pitágoras:*

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que vivió en el periodo 585 – 500 antes de Cristo. Místico y aristócrata que fundó la Escuela Pitagórica, un tipo de secta cuyo símbolo era un pentágono estrellado, y que se dedicaba principalmente al estudio de la matemática, la astronomía y la filosofía. Se le atribuye el famoso teorema que lleva su nombre el cual plantea que "**en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**".



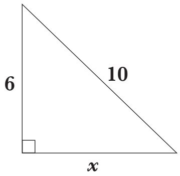

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo 1:




$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

Ejemplo 2:




| | |
|---|---|
| $10^2 = 6^2 + x^2$ | |
| $100 = 36 + x^2$ | restando 36 a ambos lados de la ecuación |
| $100 - 36 = x^2$ | restando |
| $64 = x^2$ | calculando raíz cuadrada a ambos lados |
| $8 = x$ | |

## *3. Tríos pitagóricos*

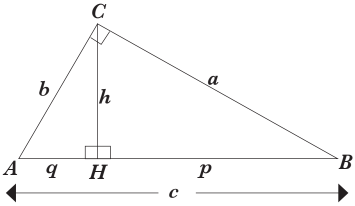
Los lados de triángulos rectángulos que satisfacen el teorema de Pitágoras son conocidos como tríos pitagóricos, algunos de los tríos pitagóricos más utilizados son:

| Cateto | Cateto | Hipotenusa |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 6 | 8 | 10 |
| 9 | 12 | 15 |
| 5 | 12 | 13 |

## *4. Teorema de Euclides*

Euclides fue un matemático. Fundador de la escuela de matemáticas de Alejandría. No se sabe cual es su fecha exacta de nacimiento y se cree que se educó en la Escuela Pitagórica de Atenas. Escribió sobre astronomía, música, óptica y otras materias, sin embargo, la obra que le dio fama universal fueron "Los Elementos", trabajo cuya mayor parte es una colección de los trabajos de sus predecesores, resumido en 13 libros o capítulos que incluyen 465 proposiciones, muchas de las cuales no son de geometría sino de teoría de números y de álgebra, escrita como una sola cadena deductiva y que por cientos de generaciones se ha conservado como un ejemplo de lógica matemática.

Es el creador del famoso teorema que lleva su nombre el cual esta basado en una serie de igualdades en **triángulos rectángulo**.




*ABC*: triángulo rectángulo en el vértice *C*

$a^2 = p \cdot c$ $\qquad h^2 = p \cdot q$

$b^2 = q \cdot c$ $\qquad h = \dfrac{a \cdot b}{c}$

*Ejercicios:*

1. Los catetos de un triángulo rectángulo son $4$ y $5$, ¿cuánto mide su hipotenusa?

2. Los catetos de un triángulo rectángulo son $7$ y $3$, ¿cuánto mide su hipotenusa?

3. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide $4$ y su hipotenusa mide $5$, ¿cuánto mide su otro cateto?

4. En un triángulo $ABC$ rectángulo en $C$ la hipotenusa mide $13$ cm y uno de los catetos mide $5$ cm, ¿cuánto mide la $h_c$?

5. Si dos lados de un triángulo rectángulo miden $4$ cm, el(los) valor(es) del tercer lado puede(n) ser

6. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide $12$ cm, su hipotenusa mide $15$, ¿cuánto mide el área de dicho triángulo?

   A) $9$ cm²
   B) $15$ cm²
   C) $36$ cm²
   D) $54$ cm²
   E) $54$ cm

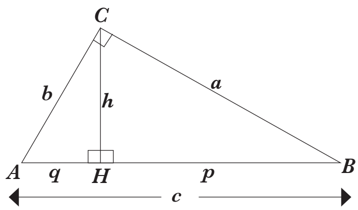
7. El área de un triángulo rectángulo es $10$ cm², si uno de sus catetos mide $5$ cm, ¿cuál es el valor de la hipotenusa?

   A) $4$ cm
   B) $5$ cm
   C) $41$ cm
   D) $\sqrt{41}$ cm
   E) $\sqrt{125}$ cm

8. En un triángulo $ABC$ rectángulo en $C$, con catetos 6 mm y 8 mm, ¿Cuanto mide $h_c$?

A) 4,8 mm
B) 9,6 mm
C) 12 mm
D) 24 mm
E) 48 mm

**Para contestar las preguntas 9, 10 y 11 utilice la siguiente figura**




9. En la figura, Si $a = 9$ y $c = 15$, ¿entonces el valor de $h$ es?

A) $\frac{18}{5}$

B) $\frac{36}{5}$

C) 5

D) 12

E) 36

10. En la figura, si $h = 6$ y $p = 18$, ¿entonces el valor de $q$ es?

A) 2
B) 6
C) 36
D) 48
E) 54

11. En la figura, si $b = 12$ y $c = 13$, ¿entonces el valor de $p$ es?

A) $25$

B) $15$

C) $5$

D) $\frac{13}{25}$

E) $\frac{25}{13}$

12. ¿cuáles de los siguientes grupos de números corresponden a tríos pitagóricos?

I) $3, 4$ y $5$ II) $1, 2$ y $\sqrt{3}$ III) $5, 8, 12$

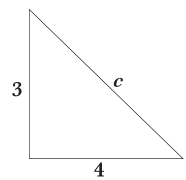
A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II, III

13. ¿Cuál es la diferencia positiva entre las áreas de un triángulo rectángulo de catetos $3$ y $4$, y un triángulo rectángulo de hipotenusa $10$ y uno de sus catetos $6$?

A) $5$
B) $8$
C) $18$
D) $24$
E) $30$

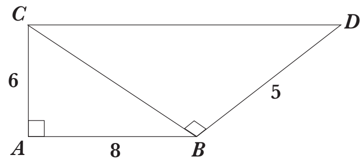
14. ¿Cuánto mide el lado $c$ del siguiente triángulo?

A) $5$
B) $6$
C) $8$
D) $10$
E) Se requiere información adicional



15. En la figura $ABC$ triángulo rectángulo en $A$, $BCD$ triángulo rectángulo en $B$, $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BD} = 5$, entonces el trazo $\overline{CD}$=

A) 5
B) 10
C) 125
D) $\sqrt{120}$
E) $5\sqrt{5}$




## *Respuestas*

| Preg. | Alternativa |
|---|---|
| 1 | $\sqrt{41}$ |
| 2 | $\sqrt{58}$ |
| 3 | 3 |
| 4 | $\frac{60}{13}$ |
| 5 | $4\sqrt{2}$ |
| 6 | D |
| 7 | D |
| 8 | A |
| 9 | B |
| 10 | A |
| 11 | E |
| 12 | C |
| 13 | C |
| 14 | E |
| 15 | E |

# Solucionario

1. Ya que el triángulo de catetos $4$ y $5$ es rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras, luego si llamamos x a la hipotenusa se cumple que:

| | |
|---|---|
| $4^2 + 5^2 = x^2$ | (Si desarrollamos las potencia, resulta) |
| $16 + 25 = x^2$ | (Sumando) |
| $41 = x^2$ | Calculando la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, resulta: |
| $\sqrt{41} = x$ | |

Por lo tanto en un triángulo rectángulo de catetos $4$ y $5$ su hipotenusa mide $\sqrt{41}$

2. Ya que el triángulo de catetos $7$ y $3$ es rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras, luego si llamamos $x$ a la hipotenusa se cumple que:

| | |
|---|---|
| $7^2 + 3^2 = x^2$ | Si desarrollamos las potencia, resulta: |
| $49 + 9 = x^2$ | (Sumando) |
| $58 = x^2$ | Calculando la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, resulta: |
| $\sqrt{58} = x$ | |

Por lo tanto en un triángulo rectángulo de catetos $7$ y $3$ su hipotenusa mide $\sqrt{58}$

3. Ya que el triángulo de cateto $4$ e hipotenusa $5$ es rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras, luego si llamamos $x$ al otro cateto se cumple que:

| | |
|---|---|
| $x^2 + 4^2 = 5^2$ | Si desarrollamos las potencia, resulta: |
| $x^2 + 16 = 25$ | Restando $16$ a ambos lados de la ecuación, resulta: |
| $x^2 = 25 - 16$ | (Luego, restando) |
| $x^2 = 9$ | Calculando la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, resulta: |
| $x^2 = \sqrt{9}$ | Calculando la raíz cuadrada de nueve, resulta: |
| $x = 3$ | |

Por lo tanto en un triángulo rectángulo de cateto $4$ e hipotenusa $5$ su otro cateto mide $3$

4. En un triángulo $ABC$ rectángulo en $C$ la hipotenusa mide $13$ cm y uno de los catetos mide $5$ cm, ¿cuánto mide $h_c$?

Ya que el triángulo de cateto $5$ e hipotenusa $13$ es rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras, luego si llamamos $x$ al otro cateto se cumple que:

$x^2 + 5^2 = 13^2$ Si desarrollamos las potencia, resulta:

$x^2 + 25 = 169$ Restando 25 a ambos lados de la ecuación, resulta:

$x^2 = 169 - 25$ (Luego, restando)

$x^2 = 144$ Calculando la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, resulta:

$x = \sqrt{144}$ Calculando la raíz cuadrada de 144, resulta:

$x = 12$

Ahora que conocemos los dos catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo, para conocer la $h_c$ utilizamos una de las igualdades de Euclides: $h_c = \dfrac{cateto \cdot cateto}{hipotenusa}$, luego

$$h_c = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$$

5. Si dos de los lados de un triángulo rectángulo miden 4 cm cada uno eso quiere decir que necesariamente el tercer lado es la hipotenusa (ya que un cateto es siempre menor que la hipotenusa) y los lados de 4 cm, son los catetos, luego como se trata de un triángulo rectángulo se cumple teorema de Pitágoras de donde ,resulta

$4^2 + 4^2 = x^2$ (Desarrollando las potencias)

$16 + 16 = x^2$ (Sumando)

$32 = x^2$ Calculando la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, resulta:

$\sqrt{32} = x$ (Descomponiendo la raíz)

$\sqrt{16 \cdot 2} = x$

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = x$ (Calculando la raíz cuadrada de 16)

$4\sqrt{2} = x$

Por los tanto si dos de los lados de un triángulo rectángulo miden 4 cm, el tercer lado mide $4\sqrt{2}$

6. La alternativa correcta es la letra D)

Dado que el triángulo es rectángulo se cumple teorema de Pitágoras, luego

$12^2 + x^2 = 15^2$ (Desarrollando las potencias)

$144 + x^2 = 225$ (Restando 144 a ambos lados de la ecuación)

$x^2 = 225 - 144$ (Restando)

$x^2 = 81$ (Despejando)

$x = 9$

Si recordamos que el área de un triángulo es $\dfrac{base \cdot altura}{2}$, y además recordamos que en un triángulo rectángulo los catetos son base y altura, resulta:

$$área = \frac{12 \cdot 9}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

7. La alternativa correcta es la letra D)

Si recordamos que el área de un triángulo es $\frac{base \cdot altura}{2}$ y además recordamos que en un triángulo rectángulo los catetos son base y altura, resulta

$10 = \frac{5 \cdot x}{2}$ (Multiplicando por 2 ambos lados de la ecuación)

$20 = 5x$ Dividiendo por 5, resulta:

$4 = x$

entonces tenemos un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5, la hipotenusa podremos calcularla utilizando teorema de Pitágoras, luego

$4^2 + 5^2 = x^2$ (Desarrollando las raíces)

$16 + 25 = x^2$ (Sumando)

$41 = x^2$ (Calculando raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación)

$\sqrt{41} = x$

8. La alternativa correcta es la letra A)

Dado que el triángulo $ABC$ es rectángulo, se cumple teorema de Pitágoras, luego podríamos desarrollar Pitágoras o percatarnos que los catetos 6 mm y 8 mm corresponden al trío pitagórico 6,8,10 con lo cuál sabemos que la hipotenusa mide 10 mm;

Ahora que conocemos los dos catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo, para conocer $h_c$ utilizamos una de las igualdades de Euclides: $h_c = \frac{cateto \cdot cateto}{hipotenusa}$, luego

$h_c = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{48}{10} = 4{,}8$

9. La alternativa correcta es la letra B)

Dado que el triángulo $ABC$ es rectángulo, se cumple teorema de Pitágoras, luego podríamos desarrollar Pitágoras o percatarnos que el cateto 9 y la hipotenusa 15 corresponden al trío pitagórico 9,12,15 con lo cuál sabemos que el otro cateto mide 12;

Ahora que conocemos los dos catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo, para conocer la $h$ utilizamos una de las igualdades de Euclides: $h = \frac{a \cdot b}{c}$ ,luego

$h = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{108}{15}$ Finalmente simplificado por 3, resulta:

$\frac{108}{15} = \frac{36}{5}$

10. La alternativa correcta es la letra A)

Si $h$ mide 6 y p mide 18, entonces podemos utilizar la siguiente igualdad de Euclides

| | |
|---|---|
| $h^2 = p \cdot q$ | (Luego reemplazando) |
| $6^2 = 18 \cdot q$ | (Desarrollando la potencia) |
| $36 = 18q$ | (Finalmente dividiendo por 18) |
| $2 = q$ | |

11. La alternativa correcta es la letra E)

Dado que el triángulo $ABC$ es rectángulo, se cumple teorema de Pitágoras, luego podríamos calcular el valor de a desarrollando Pitágoras o percatarnos que el cateto12 y la hipotenusa 13 corresponden al trío pitagórico 5,12,13 con lo cuál sabemos que el otro cateto mide 5.

Finalmente utilizamos la siguiente igualdad de Euclides $a^2 = c \cdot p$, luego reemplazando

| | |
|---|---|
| $5^2 = 13 \cdot p$ | (Desarrollando la potencia) |
| $25 = 13p$ | (Dividiendo por 13 ambos lados de la ecuación) |
| $\frac{25}{13} = p$ | |

12. La alternativa correcta es la letra C)

Recordemos que los tríos pitagóricos son los lados de triángulos rectángulos que satisfacen el teorema de Pitágoras, luego

| | |
|---|---|
| **I.** $3^2 + 4^2 = 5^2$ | (Desarrollando potencias) |
| $9 + 16 = 25$ | (Sumando) |
| $25 = 25$ | (Por lo tanto se cumple el teorema de Pitágoras y los números del ítem I son un trío pitagórico) |
| **II.** $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$ | (Desarrollando potencias) |
| $1 + 3 = 4$ | (Sumando) |
| $4 = 4$ | (Por lo tanto se cumple el teorema de Pitágoras y los números del ítem II son un trío pitagórico) |
| **III.** $5^2 + 8^2 = 12^2$ | (Desarrollando potencias) |
| $25 + 64 = 144$ | (Sumando) |
| $89 \neq 144$ | (Por lo tanto **no** se cumple el teorema de Pitágoras y los números del ítem III **no** son un trío pitagórico) |

Luego el ítem I y II son correctos

13. Alternativa correcta letra C)

Si recordamos que el área de un triángulo es $\dfrac{base \cdot altura}{2}$ y además recordamos que en un triángulo rectángulo los catetos son base y altura, el área del primer triángulo , resulta

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Dado que el segundo triángulo es también rectángulo, se cumple teorema de Pitágoras, luego podríamos calcular el valor del otro cateto desarrollando Pitágoras o percatarnos que el cateto $6$ y la hipotenusa $10$ corresponden al trío pitagórico $6,8,10$ con lo cuál sabemos que el otro cateto mide $8$.

Luego si volvemos a recordar que el área de un triángulo es $\dfrac{base \cdot altura}{2}$ y además que en un triángulo rectángulo los catetos son base y altura, el área del segundo triángulo, resulta

$$\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

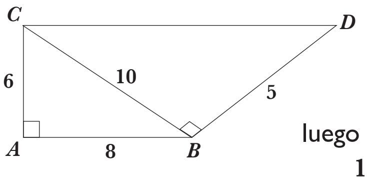
Finalmente para encontrar la diferencia positiva de las áreas, al triángulo de mayor área le restamos el que posee la menor, luego $24 - 6 = 18$

14. Alternativa correcta letra E)

Este ejercicio debe observarse con detenimiento, en primera instancia puede creerse que se trata del trío pitagórico $3,4,5$ ,sin embargo para que el teorema de Pitágoras se cumpla necesitamos que el triángulo en cuestión sea rectángulo información que no aparece en este ejercicio, por lo tanto necesitamos información adicional para resolverlo.

15. Alternativa correcta letra E)

Lo primero es percatarse que el triángulo $ABC$ corresponde al trío pitagórico $6,8,10$ luego el segmento mide $10$, con lo que el dibujo queda de la siguiente forma




Además el triángulo $BCD$ es también rectángulo con lo cual se cumple el teorema de Pitágoras,

luego $10^2 + 5^2 = \overline{CD}^2$ (Desarrollando las potencias)

$100 + 25 = \overline{CD}^2$ (Sumando)

$25 = \overline{CD}^2$ Calculando la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, resulta:

$\sqrt{125} = \overline{CD}$ (Descomponiendo la raíz)

$\sqrt{25 \cdot 5} = \overline{CD}$ (Separando las raíces)

$\sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = \overline{CD}$ (luego, como la raíz cuadrada de 25 es 5)

$5\sqrt{5} = \overline{CD}$