



Matemática 2006



Tutorial Nivel Medio

Transformaciones isométricas



Transformaciones isométricas

Marco Teórico

El proceso de llevar puntos de un lugar a otro se llama transformaciones. Si mantenemos las distancias en una transformación, estaremos hablando de **transformaciones isométricas**. Las transformaciones isométricas que revisaremos en esta guía son tres: traslaciones, rotaciones y simetrías axiales (reflexiones).

1. **Traslaciones:** Son movimientos en los cuales los trazos de una figura se mueven horizontalmente y/o verticalmente, conservando su pendiente con respecto a la horizontal (**no** giran al trasladarse). En una traslación se observan varias propiedades:

Al trasladar el trazo AB a la posición A'B' (como se observa en la figura 1), se verifica que:

$$1.1 \quad |\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$$

$$1.2 \quad \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'} \text{ son paralelos}$$

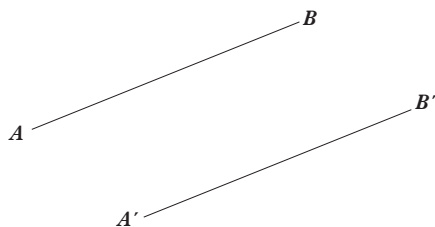


Figura 1

Si trasladamos un polígono cualquiera, por ejemplo, un triángulo ABC a la posición A'B'C' (como se observa en la figura 2), se verifica que:

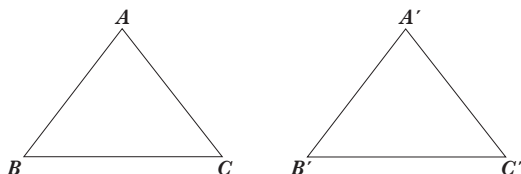
$$1.3 \quad |\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \wedge |\overline{BC}| = |\overline{B'C'}| \wedge |\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$$

$$1.4 \quad |\overline{AB}| \wedge |\overline{A'B'}| \text{ son paralelos entre sí, } |\overline{BC}| \wedge |\overline{B'C'}| \text{ son paralelos entre sí y } |\overline{CA}| \wedge |\overline{C'A'}| \text{ paralelos entre sí. Estos trazos se conocen como trazos homólogos.}$$

$$1.5 \quad |\overline{AA'}| \wedge |\overline{B'B'}| \wedge |\overline{CC'}| \text{ son paralelos entre sí.}$$

$$1.6 \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Figura 2



Nota: En un plano cartesiano los movimientos de traslación suelen representarse en forma de vectores.

Ejemplo 1: La notación “ $T(1, -2)$ ” significa que estoy representando el vector de traslación $(1, -2)$, es decir, que debo trasladar la figura en cuestión una unidad hacia la derecha (Eje de las abscisas) y dos unidades hacia abajo (Eje de las ordenadas).

Ejemplo 2: La notación “ $T(2, 6)$ ” significa que estoy representando el vector de traslación $(2, 6)$, es decir, que debo trasladar la figura en cuestión dos unidades hacia la derecha (Eje de las abscisas) y seis unidades hacia arriba (Eje de las ordenadas).

2. **Rotaciones:** Son movimientos en los cuales los trazos de una figura se mueven un ángulo dado respecto del plano. Además, la figura una vez trasladada es congruente con la figura sin trasladar (como se observa en la figura 3). En el plano cartesiano se trabaja habitualmente con rotaciones positivas (sentido antihorario) y con centro en el origen (punto $(0,0)$).

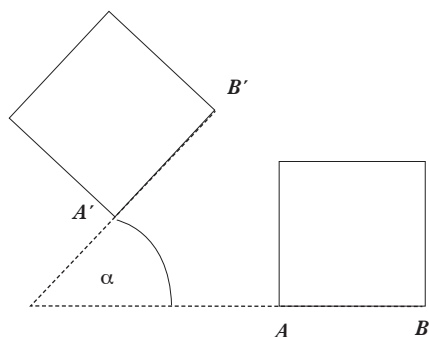
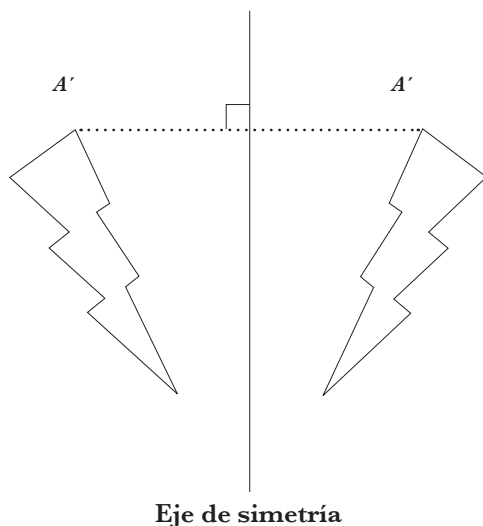


Figura 3

Si rotamos un punto (x, y) en un plano cartesiano, con centro en el origen y en sentido antihorario, los ángulos de rotación más comunes son:

Punto \ ángulo	90°	180°	270°	360°
(x, y)	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$	(x, y)

3. **Simetrías axiales (reflexiones):** Corresponde a “reflejar” una figura sobre una recta perpendicular a la unión de dos vértices homólogos. Esta recta se le conoce como el **eje de simetría** (como se observa en la figura 4).



$\overline{AA'}$ es perpendicular con el eje de simetría

Figura 4

Ejercicios

- ¿Cómo varían las coordenadas de un punto (X, Y) al efectuar en un plano cartesiano, una rotación positiva de 270° con centro en el origen?
 - $(X, -Y)$
 - $(-X, Y)$
 - $(Y, -X)$
 - $(-Y, -X)$
 - $(-Y, X)$
- ¿Cómo varían las coordenadas de un punto $(2, -5)$ al efectuar en un plano cartesiano, una rotación positiva de 180° con centro en el origen?
 - $(2, -5)$
 - $(-5, 2)$
 - $(2, 5)$
 - $(-2, -5)$
 - $(-2, 5)$

3. Si giro el triángulo ABC, cuyos vértices están ubicados en A(4,5) , B(6,9) y C(0,3) en un plano cartesiano, en sentido antihorario y con centro en el origen 60° , luego 150° , después 90° , luego 60° y, finalmente, 360° más, ¿cuál es su ubicación en el plano cartesiano?

- A) A(4,5) , B(6,9) y C(0,3)
 B) A(5,4) , B(9,6) y C(3,0)
 C) A(-4,5) , B(-6,9) y C(0,3)
 D) A(4,-5) , B(6,-9) y C(0,-3)
 E) A(-5,-4) , B(-9,-6) y C(-3,0)

4. Si un punto F = (2, 4) se traslada a F' = (-7, 2), ¿qué vector traslación T(x, y) cambia F a F'?

- A) T(9, 2)
 B) T(-7, 2)
 C) T(-7, -2)
 D) T(9, -2)
 E) T(-9, -2)

5. En la figura 1, al triángulo ABC se ha aplicado una traslación, obteniéndose el triángulo A'B'C'. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
 II. $\overline{AA'} \cong \overline{CC'}$
 III. $ABB'A'$ es un paralelogramo

- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo III
 D) Sólo II y III
 E) I, II y III

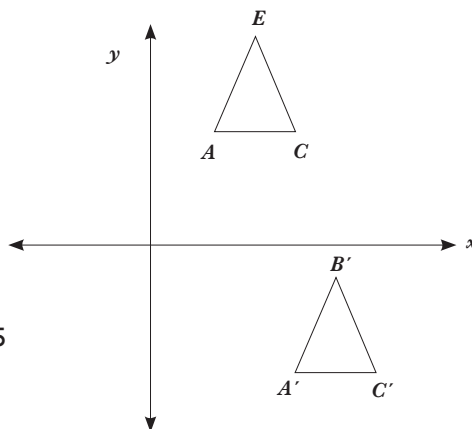
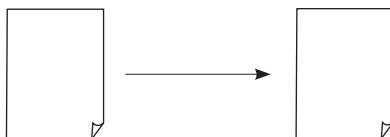


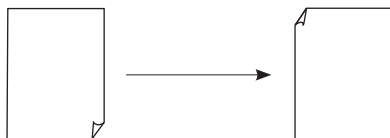
Figura 5

6. La mejor descripción de los movimientos que realiza la hoja de papel en cada una de las tres afirmaciones es:

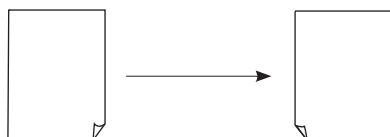
I



II



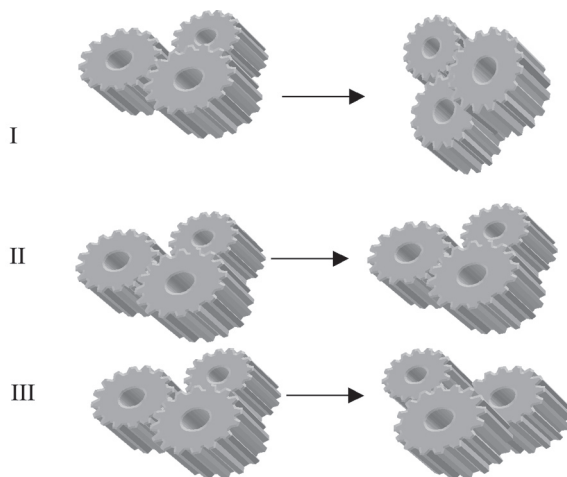
III



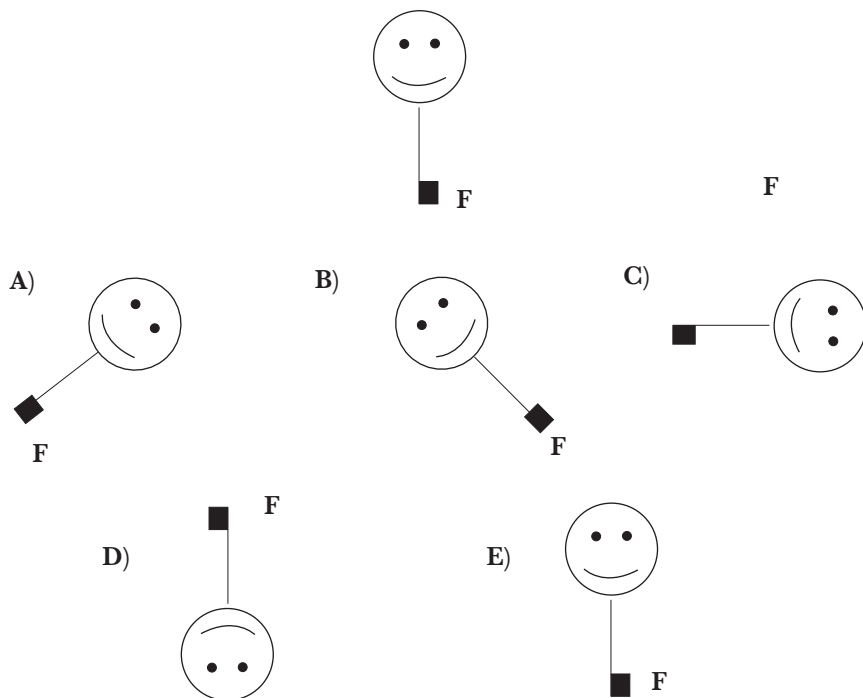
- A) I traslación, II reflexión, III rotación
- B) I reflexión, II rotación, III traslación
- C) I traslación, II rotación, III rotación
- D) I traslación, II rotación, III reflexión
- E) I traslación, II reflexión, III reflexión

7. ¿Cuál(es) del(de los) siguiente(s) movimiento(s) representa(n) una reflexión?

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y III
- E) Sólo II y III

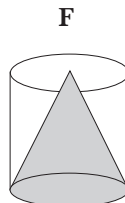
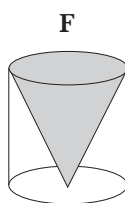
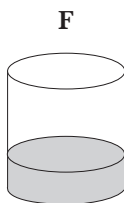
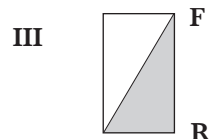
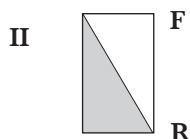
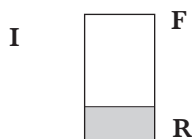


8. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una rotación positiva (En contra de las manecillas del reloj) de la figura en 270° con centro en F?



9. Si roto 180° el triángulo de vértices $A(1, 2)$, $B(-2, 5)$ y $C(-4, 3)$, en un plano cartesiano, con centro en el origen y sentido antihorario, los vértices del triángulo resultante son:
- A) $A(2, 1)$, $B(5, -2)$ y $C(-4, 3)$
 - B) $A(1, -2)$, $B(-2, -5)$ y $C(-4, -3)$
 - C) $A(-1, 2)$, $B(2, 5)$ y $C(4, 3)$
 - D) $A(-1, -2)$, $B(2, -5)$ y $C(4, -3)$
 - E) $A(-1, -2)$, $B(2, 5)$ y $C(4, 3)$
10. ¿Qué vector traslación reemplaza a una traslación de un vector $T_1(4, 2)$ seguido de un segundo vector $T_2(-5, 7)$?
- A) $T(1, 9)$
 - B) $T(9, 1)$
 - C) $T(-9, -1)$
 - D) $T(9, -1)$
 - E) $T(-1, 9)$
11. ¿Qué par de vectores traslación reemplaza, al aplicar uno después del otro, al vector de traslación $T(9, -8)$?
- A) $T(2, 0)$ y $T(4, -8)$
 - B) $T(-2, -3)$ y $T(-7, -5)$
 - C) $T(-5, 7)$ y $T(-4, -15)$
 - D) $T(7, 2)$ y $T(2, 3)$
 - E) $T(7, -7)$ y $T(2, -1)$

12. ¿En cuál(es) de las opciones siguientes el cilindro que se genera al rotar el rectángulo en torno al lado $\overline{FR}$ es el que aparece bajo el rectángulo?

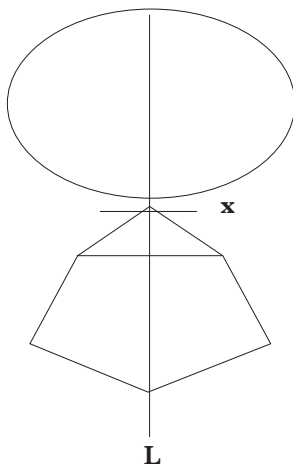


- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y II
- E) Sólo I y III

13. Si al punto $(2, 4, -3)$ ubicado en un sistema tridimensional de coordenadas le aplicamos un vector de traslación $T(0, -2, 3)$, ¿dónde queda ubicado?

- A) $(2, 4, -3)$
- B) $(2, 2, -3)$
- C) $(2, 2, 0)$
- D) $(2, 6, -6)$
- E) $(0, 2, 0)$

14. Dado el eje de simetría L y el punto X de la figura, ¿qué transformación isométrica se debe aplicar a la mitad derecha del dibujo para así obtener la mitad izquierda?



- A) Una traslación
B) Una rotación de 180° con centro en X
C) Una rotación de 270° con centro en X
D) Una simetría (reflexión) con respecto al eje L
E) Una simetría (reflexión) con respecto al punto X
15. Si al punto $(3, -2)$ se le realiza una rotación positiva de 90° , en un plano cartesiano, con centro en el origen y luego una traslación con el vector $T(4, 1)$, ¿dónde queda ubicado el punto?
- A) $(4, 1)$
B) $(2, -3)$
C) $(6, 4)$
D) $(4, 6)$
E) $(7, -1)$

Respuestas

Preg.	Respuesta
1	C
2	E
3	A
4	E
5	E
6	D
7	C
8	C
9	D
10	E
11	E
12	E
13	C
14	D
15	C

Solucionario

1. Alternativa correcta C.

Para realizar una rotación positiva de 270° con centro en el origen de un punto (X, Y) , debemos dejarlo en la posición $(Y, -X)$.

2. Alternativa correcta E.

Para realizar una rotación positiva de 180° con centro en el origen de un punto (X, Y) , debemos dejarlo en la posición $(-X, -Y)$, luego el punto $(2, -5)$ se transforma en $(-2, 5)$.

3. Alternativa correcta A.

Debemos sumar los ángulos que giró la figura, lo que da un total de 720° , o sea, que el triángulo giró 2 vueltas completas (el doble de 360°). Por lo tanto, triángulo quedó exactamente donde se encontraba ubicado originalmente: $A(4,5)$, $B(6,9)$ y $C(0,3)$.

4. Alternativa correcta E.

Para que 2 se transforme en -7 , debemos restarle 9 (o sumarle -9), y para que 4 se transforme en 2 debemos restarle 2 (o sumarle -2). Luego el vector traslación necesario para transformar F en F' es $T(-9, -2)$.

5. Alternativa correcta E.

Por propiedad de movimientos geométricos al trasladar una figura, la figura “original” es congruente con la figura trasladada, con lo cual la afirmación I es **verdadera**.

Los trazos $\overline{AA'} \cong \overline{CC'}$ corresponden a la longitud del vector de traslación con lo cual son congruentes, pues todos los puntos de una figura (en una traslación) se mueven la misma longitud, con lo cual la afirmación II es **verdadera**.

En el cuadrilátero $ABB'A'$ los trazos AA' con BB' son paralelos, pues por propiedad de traslaciones los “vectores” de traslación son paralelos entre sí, además los trazos AB y $A'B'$ por corresponder a trazos homólogos son necesariamente congruentes. Por lo tanto el cuadrilátero $ABB'A'$ es un paralelogramo, con lo cual la afirmación III es **verdadera**.

6. Alternativa correcta D.

En la figura de la afirmación I, observamos que la “punta doblada” de la hoja no presenta ningún “giro”, por lo cual la mejor descripción para el movimiento realizado es la **traslación**.

En la figura de la afirmación II, la “punta doblada” parte en el margen inferior derecho y se “mueve” al margen superior izquierdo, con lo cual la mejor descripción para el movimiento realizado es la **rotación** (180°).

En la figura de la afirmación III, la “punta doblada” no puede obtenerse con una rotación, pero sí con una **reflexión**, utilizando como eje de simetría una recta paralela al largo de las hojas.

7. Alternativa correcta C.

En la figura de la afirmación I, observamos que los “engranajes” presentan un “giro” por lo cual la mejor descripción para el movimiento realizado es la **rotación**.

En la figura de la afirmación II, los “engranajes” no presentan ningún “giro” por lo cual la mejor descripción para el movimiento realizado es la **traslación**.

En la figura de la afirmación III, los “engranajes” **no** puede obtenerse con una rotación, pero sí con una **reflexión**, utilizando como eje de simetría una recta perpendicular con la horizontal.

8. Alternativa correcta C.

A) Esta alternativa muestra un giro positivo de 315° ó uno negativo (A favor de las manecillas del reloj) de 45° .

B) Esta alternativa muestra un giro positivo (En contra de las manecillas del reloj) de 45° .

C) Esta alternativa muestra un giro positivo (En contra de las manecillas del reloj) de 270° . Es por lo tanto, la alternativa correcta.

D) Esta alternativa muestra un giro de 180° .

E) Esta alternativa muestra no representa ningún giro, lo que podría interpretarse como un giro de 0° o uno de 360° .

9. Alternativa correcta D.

Para rotar 180° un punto (X, Y) , en un plano cartesiano y con centro en el origen, variamos el punto a $(-X, -Y)$. Luego, al efectuar la rotación:

El triángulo A $(1, 2)$, B $(-2, 5)$ y C $(-4, 3)$,se transformará en:

$$A'(-1, -2), B'(2, -5) \text{ y } C'(4, -3)$$

10. Alternativa correcta E.

¿Qué vector traslación reemplaza a una traslación con un vector $T_1 (4, 2)$ seguido de un segundo vector $T_2 (-5, 7)$?

Al aplicar un vector después de otro, las abscisas se trasladan 4 y luego -5, es decir: $4 - 5 = -1$ y las ordenadas se trasladan 2 unidades y luego 7 unidades mas, es decir: $2 + 7 = 9$.

Con lo cual el vector de traslación necesario para reemplazar a T_1 y T_2 es $T(-1, 9)$.

11. Alternativa correcta E.

Sumando abscisas y ordenadas respectivamente:

- A) $T(2, 0)$ y $T(4, -8)$ es igual a $T(2+4, 0-8) \Rightarrow T(6, -8)$ con lo cual A es falsa.
- B) $T(-2, -3)$ y $T(-7, -5)$ es igual a $T(-2-7, -3-5) \Rightarrow T(-9, -8)$ con lo cual B es falsa.
- C) $T(-5, 7)$ y $T(-4, -15)$ es igual a $T(-5-4, 7-15) \Rightarrow T(-9, -8)$ con lo cual C es falsa.
- D) $T(7, 2)$ y $T(2, 3)$ es igual a $T(7+2, 2+3) \Rightarrow T(9, 5)$ con lo cual D es falsa.
- E) $T(7, -7)$ y $T(2, -1)$ es igual a $T(7+2, -7-1) \Rightarrow T(9, -8)$ con lo cual E es verdadera.

12. Alternativa correcta E.

Si giramos un rectángulo generamos un cilindro, (como muestran las figuras). En la afirmación I la figura achurada es también un rectángulo y por lo tanto generará un cilindro de altura igual a la del rectángulo; por lo tanto, la afirmación I es **verdadera**.

Si giramos un triángulo rectángulo, utilizando como eje uno de sus catetos, se generará un cono de altura igual a la del cateto utilizado como eje y, dado el área achurada del rectángulo inicial, el cono generado estaría **NO** achurado; por lo tanto, la afirmación II es **falsa**.

Si giramos un triángulo rectángulo, utilizando como eje uno de sus catetos, se generará un cilindro de altura igual a la del cateto utilizado como eje; por lo tanto la afirmación III es **verdadera**.

13. Alternativa correcta C.

En una traslación en tres dimensiones, trabajamos de forma muy parecida que en dos dimensiones. Simplemente tomamos el punto y sumamos respectivamente las abscisas, ordenadas y cotas (x, y, z) del punto y el vector de traslación y los sumamos.

$$(2, 4, -3) + (0, -2, 3) = (2 + 0, 4 - 2, -3 + 3) = (2, 2, 0)$$

14. Alternativa correcta D.

Al tomar la mitad derecha del dibujo, si rotamos o trasladamos la figura, **no** obtendremos una imagen exactamente igual. Pero al “moverla” como si fuese “un reflejo de espejo”, el movimiento sólo lo podemos efectuar con una simetría axial (reflexión), en donde reflejamos la figura sobre el eje L, obteniendo de esa forma la figura original.

15. Alternativa correcta C.

Al girar en 90° un punto (x, y) se transforma en $(-y, x)$, luego el punto $(3, -2)$ se transforma en $(2, 3)$ y al aplicarle el vector traslación $T(4,1)$, se transforma en $(2 + 4, 3 + 1) = (6, 4)$.

CEPECH

ESPECIALISTAS DE LA PSU

Grupo Educacional Cepech