Tutorial MT-b14

# Matemática 2006

## Tutorial Nivel Básico

Geometría de proporción

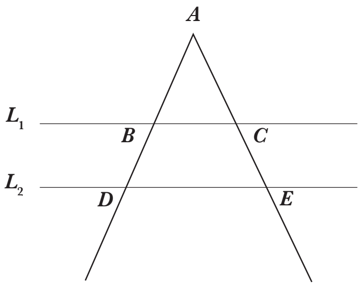

CEPECH
ESPECIALISTAS DE LA PSU
Grupo Educacional Cepech

# Geometría de proporción

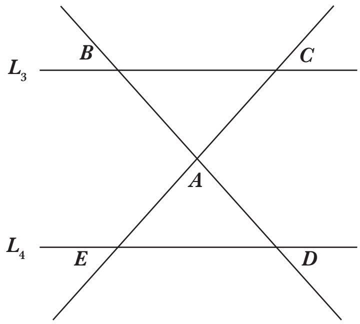
## 1. Teorema de Thales:

Thales de Mileto, (624-547 a.C.) fue el primer y auténtico filósofo del mundo antiguo, vivió en Mileto, sobre la costa de Asia Menor hacia el año 600 a.C. Estudió el firmamento y enseño a los marinos a navegar guiándose por las estrellas; predijo un eclipse; enseño a los egipcios a medir la altura de las pirámides utilizando la sombra que proporcionaban las mismas a determinada hora del día. Se distinguió también como geómetra y formuló el teorema que lleva su nombre. El cuál detallamos a continuación:

"Cuando dos o más rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan en éstas segmentos proporcionales". De la forma:




$L_1 \wedge L_2$ son paralelas




$L_3 \wedge L_4$ son paralelas

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

## 2. Sección Áurea o divina

Dado un segmento $AB$ de longitud $x$ se dice que un punto $M$ lo divide en ***media*** y ***extrema razón*** si se verifica la siguiente relación:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$$

observar que: $\overline{AM} > \overline{MB}$

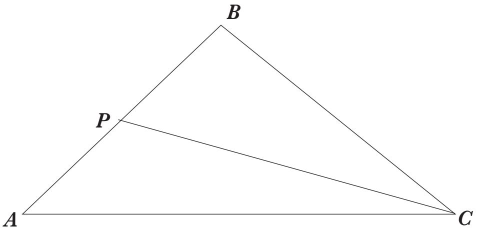

Al Trazo $AM$ se lo denomina ***Sección Áurea*** del segmento dado. Al calcular el cuociente de los trazos de un segmento dividido en sección Áurea este es aproximadamente igual a:

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong \mathbf{1{,}618}$ valor que es conocido como número de oro o **Ø** (letra griega Phi).

Este importante número posee aplicaciones matemáticas, artísticas y arquitectónicas entre otras. Por ejemplo, muchas construcciones griegas y muchas obras del genio Leonardo da Vinci están construidas en base al número de oro.

# 3. Teorema de las bisectrices (o teorema de Apolonio):

Si en un triángulo $ABC$ consideramos el punto de intersección $P$ de la bisectriz interior del ángulo $C$ con el lado opuesto se cumple: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$




$\overline{PC}$ Bisectriz de ángulo $BCA$

# 4.Semejanza(~): son figuras que tienen igual forma.

Llamamos homólogos, los vértices de ángulos iguales y diremos que lados homólogos son aquellos que tienen por extremo un par de vértices homólogos.

Dos triángulos que tienen sus ángulos iguales, tienen sus lados homólogos proporcionales.

## *4.1 Criterios de semejanzas de triángulos.*

- Primer criterio: Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos internos iguales.
- Segundo criterio: Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo conforman, proporcionales.
- Tercer criterio: Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.

**5. Congruencia(≅):** Como un caso particular de semejanza de figuras tenemos el caso de congruencia.

Dos figuras son congruentes cuando son exactamente iguales.

Cuando hablamos de congruencia de triángulos, entendemos que sus lados son respectivamente iguales y también lo son sus ángulos.

### *5.1 Criterios para la congruencia de triángulos.*

- Primer criterio: Dos triángulos son congruentes cuando sus lados homólogos son iguales.
- Segundo criterio: Dos triángulos son congruentes cuando tienen un ángulo igual comprendido entre lados homólogos respectivamente iguales.
- Tercer criterio: Dos triángulos son congruentes si tienen un lado igual y los ángulos homólogos adyacentes a él, respectivamente iguales.

**6. Equivalencia:** Se llaman figuras equivalentes a aquellas que poseen igual área

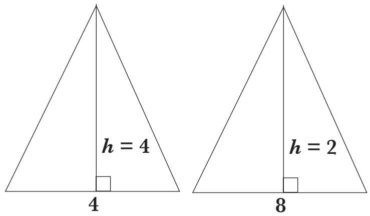
### *Ejercicios:*

1. Dos triángulos son equivalentes si

   A) tienen sus tres ángulos internos iguales
   B) tienen dos de sus ángulos iguales
   C) poseen dos lados homólogos
   D) poseen igual perímetro
   E) poseen la misma superficie

2. Las siguientes figuras son entre sí:

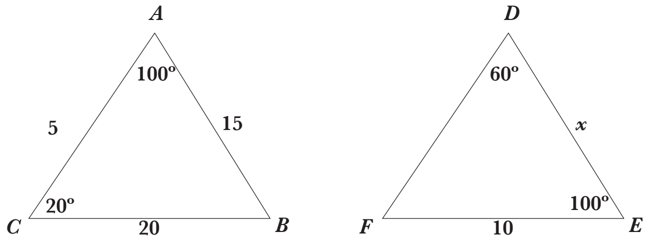
   I. Congruentes
   II. Semejantes
   III. Equivalentes




   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo II y III
   E) Ninguna de las anteriores

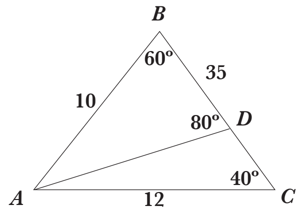
3. Si los triángulos $ABC$ y $DEF$ son semejantes. ¿Cuál es el valor de $x$?

A) 3,3
B) 5
C) 7,5
D) 15
E) 30



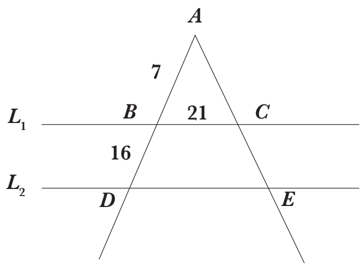

4. ¿Cuánto mide $\overline{CD}$?

A) 12
B) 35
C) 42
D) 84
E) Se requiere información adicional




5. En el dibujo $L_1$ y $L_2$ son paralelas, ¿Cuánto mide $\overline{DE}$?

A) 16
B) 32
C) 40
D) 48
E) 69




6. En la figura $\overline{AB} = 3$, $\overline{CD} = 5$, $\overline{BO} = 4$, entonces $\overline{CO} =$

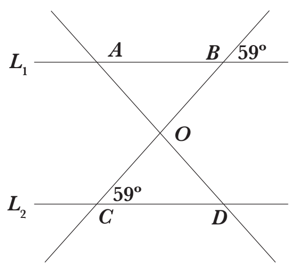
A) $\dfrac{3}{20}$

B) $\dfrac{20}{3}$

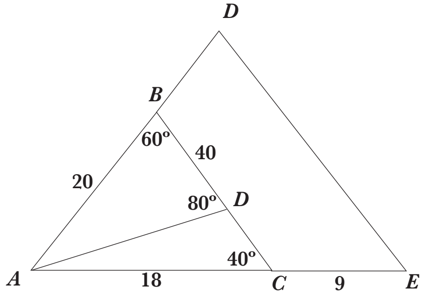
C) 4

D) 20

E) Se requiere información adicional

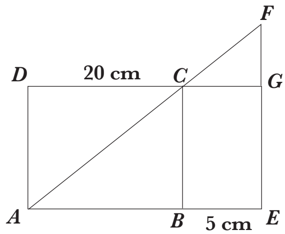


7. Si $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos, entonces $\overline{DE} =$




A) 130
B) 114
C) 105
D) 76
E) 36

8. Si $ABCD$ es rectángulo de área 80 cm$^2$ y $BEGC$ también es un rectángulo, $\overline{FG}$ =



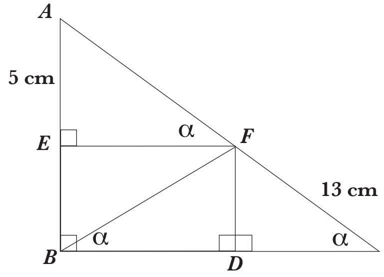

A) 1 cm
B) 2 cm
C) 3 cm
D) 4 cm
E) 5 cm

9. Encontrar la sección áurea de un trazo de 144 cm (considere Phi = $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$)

A) $1 + \sqrt{5}$ cm
B) 88,99 cm
C) 95 cm
D) 99,88 cm
E) 144 cm

10. Calcular el área de la figura, sabiendo que $AEF$, $BEF$, $BDF$ y $CDF$ son triángulos congruentes entre sí, en donde $\overline{AE}$ = 5cm y $\overline{FC}$ = 13 cm

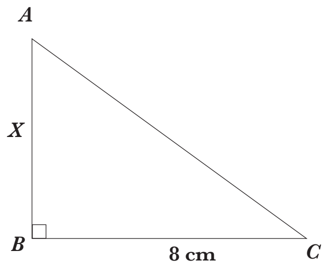
A) 12 cm²
B) 30 cm²
C) 60 cm²
D) 120 cm²
E) 240 cm²




11. Si la razón de los trazos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ está en sección áurea y $8 > X$, entonces $X$ mide:

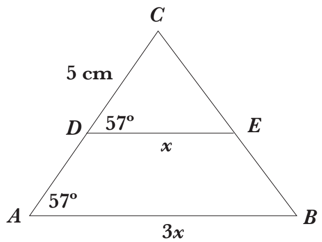
(considere Phi = $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$)

A) 1,618 cm
B) 3,1415 cm
C) $4(\sqrt{5} - 1)$ cm
D) $-4(1+\sqrt{5})$ cm
E) $\frac{(1+\sqrt{5})}{16}$ cm



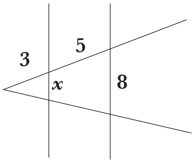

12. ¿Cuánto mide $\overline{AD}$?

A) 10 cm
B) 8 cm
C) 5 cm
D) 1 cm
E) Se requiere información adicional

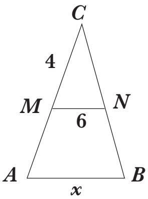


13. ¿En cuál(es) de las siguiente(s) figura(s) puede(n) encontrarse el valor de $x$?

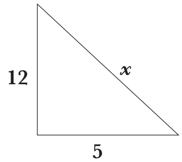
I.




II.




III.




$\overline{MN}$ es mediana del triángulo $ABC$

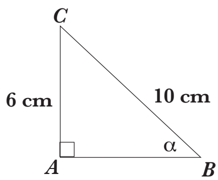
A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

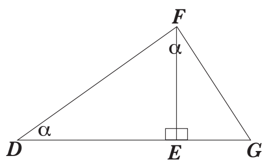
14. Cuanto mide la diagonal de un cuadrado equivalente a la suma de dos circunferencias de radio 3 cm cada una (considere $\pi = 3$)

A) 27 cm
B) 54 cm
C) 108 cm
D) $6\sqrt{3}$ cm
E) $54\sqrt{2}$ cm

15. El triángulo $ABC$ es congruente con el triángulo $DEF$ y semejante con $EFG$, ¿Cuánto mide el trazo $EG$?

A) 4,5
B) 6
C) 6,5
D) 8
E) 9



*Respuestas*

| Preg. | Alternativa |
|---|---|
| 1 | E |
| 2 | C |
| 3 | E |
| 4 | C |
| 5 | E |
| 6 | B |
| 7 | B |
| 8 | A |
| 9 | B |
| 10 | D |
| 11 | C |
| 12 | A |
| 13 | B |
| 14 | D |
| 15 | A |

# *Solucionario*

1. Alternativa correcta letra E)

   Dos triángulos son equivalentes si:

   A) Falso, en este caso son semejantes, pero pueden tener distinta área

   B) Falso, no se menciona si son ángulos internos o externos, además si fuesen internos, en ese caso serian semejantes, pero pueden tener distinta área

   C) Falso, por lo señalado en A y B

   D) Falso, dos triángulos pueden tener exactamente el mismo perímetro y poseer distintas áreas

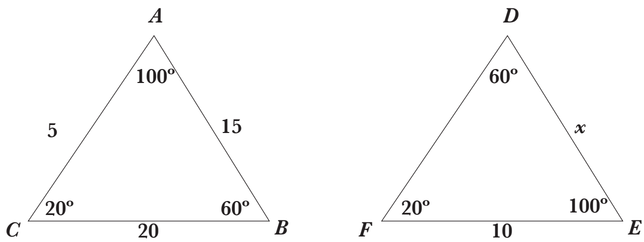
   E) Verdadera, dos triángulos son equivalentes si **poseen la misma superficie o área**

2. Alternativa correcta letra C)

   Faltan elementos para determinar semejanza o congruencia sin embargo el primer triángulo posee área 8 $cm^2$ y el segundo triángulo también posee área 8 $cm^2$, por lo tanto son triángulos equivalentes, sin embargo no poseen exactamente la misma forma, con lo cuál descartamos que sean semejantes o congruentes. Por lo tanto sólo el ítem III es verdadero.

3. Alternativa correcta letra E)

   Desarrollando los ángulos internos de los triángulos




Además como dos triángulos que tienen sus ángulos iguales, tienen sus lados homólogos proporcionales. Podemos concluir que:

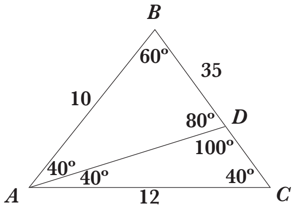
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{FE}}$ (Reemplazado los valores)

$\dfrac{15}{5} = \dfrac{x}{10}$ (Despejando $x$)

$x = 30$

4. Alternativa correcta letra C)

Al desarrollar los ángulos internos:




Con lo cuál el trazo $AD$ es bisectriz y podemos utilizar teorema de Apolonio, con lo cuál

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$ (Reemplazando)

$$\frac{10}{35} = \frac{12}{\overline{CD}}$$ (Despejando)

Trazo $CD = 42$

5. Alternativa correcta letra E)

Dado que $L_1$ y $L_2$ son paralelas, podemos utilizar teorema de Thales, de donde se desprende que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$ (Reemplazando)

$$\frac{7}{21} = \frac{23}{\overline{DE}}$$ (Despejando)

Trazo $DE = 69$

6. Alternativa correcta letra B)

Ya que los ángulos sobre las rectas poseen la misma medida, por correspondencia deducimos que $L_1$ y $L_2$ son paralelas, con lo cuál podemos utilizar teorema de Thales, dado lo cual:

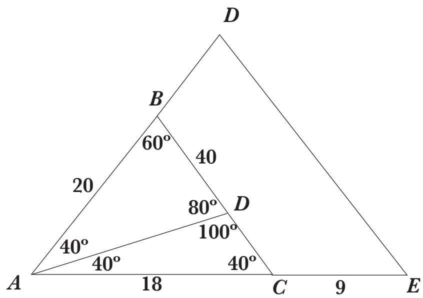
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DO}}$$ (Reemplazando)

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{\overline{DO}}$ (Despejando)

Trazo $DO = \dfrac{20}{3}$

7. Alternativa correcta letra B)

Completando los ángulos internos




Con lo cuál el trazo $AD$ es bisectriz y podemos utilizar teorema de Apolonio, en donde:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$ (Reemplazando)

$\dfrac{20}{40} = \dfrac{18}{\overline{CD}}$ (Despejando)

Trazo $CD = 36$

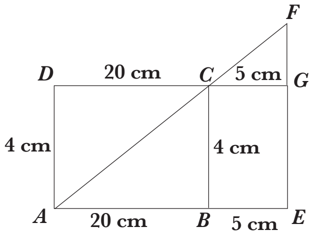
Luego el trazo $BC$ es igual a $\overline{BD} + \overline{CD} = 40 + 36 = 76$, además como $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos podemos utilizar teorema de Thales de donde:

$\dfrac{18}{76} = \dfrac{27}{\overline{DE}}$ (Despejando)

trazo $DE = 114$

8. Alternativa correcta letra A)

Si $ABCD$ es rectángulo de área $80$ cm$^2$ entonces su ancho es $4$ cm ya que $4$ por $20$ son $80$, además como $ABCD$ y $BEGC$ son rectángulos, los trazos $AE$ y $DG$ son paralelas y por correspondencia los ángulos $BAC$ y $GCF$ son iguales con lo cual los triángulos $ABC$ y $GCF$ son semejantes, gráficamente tenemos que:




Como los triángulos $ABC$ y $GCF$ son semejantes, tenemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{FG}}$$ (Reemplazando)

$$\frac{20}{4} = \frac{5}{\overline{FG}}$$ (Despejando)

Trazo $FG$ = 1 cm

9. Alternativa correcta letra B)

El valor de $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ es equivalente al número de oro, o sea, a $1.618$ aproximadamente.
Utilizando la ecuación $X = a\,\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$, en donde:

$X$ = Segmento Entero
$a$ = Segmento Áureo

$$\frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1{,}618$$

Con $X = 144$

$$144 = a \cdot \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$ (Despejando $a$)

$$\frac{144}{\frac{(1+\sqrt{5})}{2}} = a$$ (Reemplazando $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ por $1{,}618$)

$$\frac{144}{1{,}618} = a$$ (Dividiendo)

$$88{,}99 = a$$

10. Alternativa correcta letra D)

Ya que $AEF$ es congruente con $CDF$ los trazos $AF$ y $FC$ miden lo mismo, con lo cuál aplicando Pitágoras, nos percatamos que el triángulo $AEF$ corresponde al trío pitagórico 5, 12, 13 ,su área corresponde entonces a 30 cm$^2$, luego como los 4 triángulos son congruentes el área de la figura corresponde a $4 \cdot 30 = 120$ cm$^2$

11. Alternativa correcta letra C)

Dado que $8 > X$ entonces 8 es el segmento Áureo y por lo tanto $\frac{8}{x} = Ø$ y dado que Phi (Ø) equivale a $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$, entonces $\frac{8}{x} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$, de donde despejando obtenemos:

$X = \frac{16}{(1+\sqrt{5})}$ (Finalmente racionalizando)

$X = 4(\sqrt{5} - 1)$

12. Alternativa correcta letra A)

Ya que los ángulos sobre los trazos $DE$ y $AB$ poseen la misma medida, por correspondencia deducimos que $L_1$ y $L_2$ son paralelas, con lo cuál podemos utilizar teorema de Thales, dado lo cual:

$\frac{5}{x} = \frac{5+\overline{AD}}{2}$ (Multiplicando cruzado)

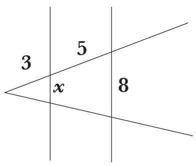
$15x = 5x + xAD$ (Despejando)

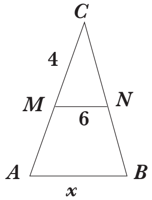
$10x = xAD$ (Dividiendo por $x$, ambos lados de la ecuación)

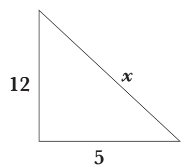
trazo $AD = 10$

13. Alternativa correcta letra B)

¿En cuál(es) de las siguiente(s) figura(s) puede(n) encontrarse el valor de x?

I.



II.



III.



$\overline{MN}$ es mediana del triángulo $ABC$

En I no tenemos información para asegurar que las rectas sean o no paralelas, por lo cual no podemos utilizar Thales y no podemos encontrar el valor de $x$.

En II como toda mediana es paralela a su lado opuesto, podemos utilizar teorema de Thales y por lo tanto descubrir el valor de $x$.

En III podría pensarse que se trata del trío pitagórico 5, 12, 13 ,pero el triángulo en cuestión no es rectángulo, y para utilizar trigonometría necesitamos poseer por los menos un ángulo, por lo tanto no podemos conocer el valor de $x$.

Dado esto solo podemos conocer el valor de $x$ en II.

14. Alternativa correcta letra D)

Cuanto mide la diagonal de un cuadrado equivalente a la suma de dos circunferencias de radio 3 cm cada una (considere $\pi = 3$)

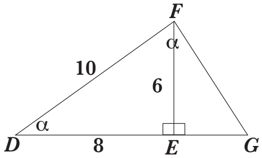
Ya que dos figuras son equivalentes cuando sus respectivas áreas son iguales y dado que el área de una circunferencia es el radio al cuadrado por $\pi$ (3 en este caso), tenemos que el área de una circunferencia de radio 3 es igual a: $3^2 \cdot 3 = 27$ cm$^2$ , por lo tanto el área de dos circunferencias de radio 3 será de $2 \cdot 27 = 54$ cm$^2$ ,luego estamos buscando la diagonal de un cuadrado de superficie 54 cm$^2$. Para esto debemos sacar la raíz cuadrada al área y así encontrar su lado, siendo el lado del cuadrado = $\sqrt{54}$ cm, finalmente calculamos la diagonal del cuadrado, multiplicando el lado por raíz cuadrada de 2.

Diagonal = $\sqrt{54} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{108}$ (Descomponiendo)

$\sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$ cm

15. Alternativa correcta letra A)

Si desarrollamos Pitágoras, descubrimos que $ABC$ corresponde al trío pitagórico 6, 8, 10, además Si $ABC$ es congruente con el triángulo $DEF$, entonces $DEF$ también corresponde al trío pitagórico 6, 8, 10




Además como el triángulo $ABC$ es semejante con $EFG$, se asume que $DEF$ es también semejante con $EFG$ ,entonces sus lados son proporcionales y podemos decir que:

$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{EG}}$ (Reemplazando los trazos conocidos)

$\dfrac{8}{6} = \dfrac{6}{\overline{EG}}$ (Despejando

Trazo $EG = \dfrac{36}{8}$ (Dividiendo)

Trazo $EG = 4{,}5$