Tutorial
MT-b16

Matemática 2006

Tutorial Nivel Básico

Geometría analítica en línea recta

CEPECH
ESPECIALISTAS DE LA PSU
Grupo Educacional Cepech

Geometría analítica en línea recta

Marco teórico:

1. *Par ordenado (a, b)*: Corresponde a un elemento cuya forma es la siguiente (a, b) y se lee par ordenado a, b.

$a \longrightarrow$ primer componente (abscisa)
$b \longrightarrow$ segundo componente (ordenada)

El paréntesis redondo es parte de su caracterización, por ejemplo: $(a, b) \neq \{a, b\}$; la primera expresión es un par ordenado y el segundo es un conjunto de elementos.

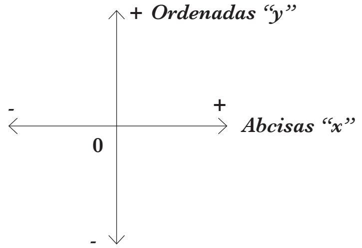
Como consecuencia de su definición, el par $(a, b) \neq (b, a)$.

Ejemplo: $(5, 3) \neq (3, 5)$.

2. *Plano Cartesiano:* Un plano cartesiano es la representación del producto cartesiano en un sistema de ejes coordenados. Se forma por dos rectas que se interceptan perpendicularmente de modo que, cada una de las rectas se asocia a un sistema numérico, donde el punto de intersección es llamado centro u origen del sistema y se le asigna el número **0**.

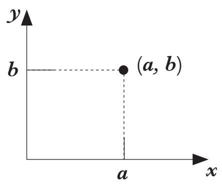
La recta horizontal se llama eje de las **abscisas** (x), o de las "primeras componentes". A la derecha del cero se ubican convencionalmente valores positivos y a la izquierda valores negativos.

El eje vertical se llama eje de las **ordenadas** (y) o de las "segundas componentes". Sobre el cero, convencionalmente se ubican los valores positivos y bajo éste los valores negativos.



Nota: Al sistema de ejes coordenados se le llama también sistema de ejes ortogonales o sistema de ejes cartesianos.

La representación de un par ordenado en el sistema de ejes coordenados se realiza de la siguiente manera: la componente primera va ir siempre en el eje de las x y la segunda en el eje de las y.



La representación de un par ordenado queda determinada mediante un punto que se ubica con respecto a cada una de sus componentes en la intersección de las paralelas al eje de las "x" y de las "y" respectivamente.

3. Concepto de Recta: Una recta es la representación gráfica de una función de primer grado. La forma más utilizada para su representación es la forma principal de la línea recta que corresponde a $y = mx + n$

*4. Coeficiente de posición(**n**):* Corresponde al punto de corte con el eje de las ordenadas

*5. Pendiente(**m**):* En la ecuación principal de la recta $y = mx + n$, el valor de m corresponde a la pendiente de la recta.

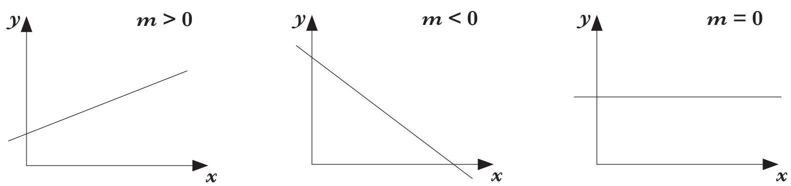
La pendiente permite obtener el grado de inclinación que tiene una recta, mientras que el coeficiente de posición señala el punto en que la recta interceptará al eje de las ordenadas.

Ejemplo: La ecuación $y = 8x + 56$ tiene pendiente 8 y coeficiente de posición 56, lo que indica que interceptará al eje y en el punto $(0,56)$.

Cuando se tienen dos puntos cualesquiera (x_1,y_1) y (x_2,y_2), la pendiente queda determinada por el cuociente entre la diferencia de las ordenadas de dos puntos de ella y la diferencia de las abscisas de los mismos puntos, o sea

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Tenga en cuenta que una recta que es paralela al eje x, tiene pendiente 0. y que gráficamente:



6. Rectas Paralelas, coincidentes y perpendiculares: Dos rectas son **paralelas** cuando sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición distintos, o sea si:

$L_1: y = m_1x + n_1 \quad \wedge \quad L_2: y = m_2x + n_2,$

Entonces $L_1 // L_2$ sí y sólo si $m_1 = m_2$

Ejemplo: Las rectas $y = 6x + 11$; $y = 6x - 8$ son paralelas.

Dos rectas son **coincidentes** cuando sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición iguales, o sea

$L_1: y = m_1x + n_1 \quad \wedge \quad L_2: y = m_2x + n_2,$

Entonces L_1 coincidente con L_2 sí y sólo si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$

Dos rectas son **perpendiculares** cuando el producto de sus pendientes es -1, o sea

$L_1: y = m_1x + n_1 \quad \wedge \quad L_2: y = m_2x + n_2,$

Entonces $L_1 \perp L_2$ sí y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejemplo: Si $L_1: y = -4x + 12 \quad \wedge \quad L_2: y = \frac{1}{4}x - 23$

Entonces $L_1 \perp L_2$ ya que $-4 \cdot \frac{1}{4} = -1$

7. Ecuación punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

8. Ecuación a contar de dos puntos: $y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$

Ejercicios:

1. La recta $2y = 6x - 10$ ¿corta al eje y en el punto?

   A) -5
   B) (0, -5)
   C) (0, -10)
   D) (0, 5)
   E) (5, 0)

2. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) recta(s) es paralela(s) a: $3y = 6x + 12$?

I) $y = 6x + 20$ II) $2y = 6x + 35$ III) $y = 2x + 15$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II, III

3. ¿Cuál es el valor de la ordenada del punto de corte con el eje y en la recta $y = 4x - 3$?

A) -3
B) 0
C) 3
D) 4
E) 7

4. ¿Cuál de las siguientes rectas posee pendiente 3 y coeficiente de posición -4?

A) $y = 3x + 5$
B) $y = 4x - 4$
C) $2y = 3x - 4$
D) $y = -4$
E) $5y = 15x - 20$

5. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) recta(s) es(son) perpendicular(s) a: $5y = 20x + 50$?

I) $y = -4x + 20$ II) $y = \frac{-x}{20} + 22$ III) $y = \frac{-x}{4} + 3$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II, III

6. ¿Cuál es la ecuación de la recta de pendiente 7 y que pasa por el punto (3,4)?

A) $y = 7x + 31$
B) $y = 7x + 17$
C) $y = 7x + 7$
D) $y = 7x - 17$
E) $y = 7x - 31$

7. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (3,-6)?

A) $y = \frac{-3x}{2} - 2$

B) $y = 3x - 6$

C) $y = -2x + 4$

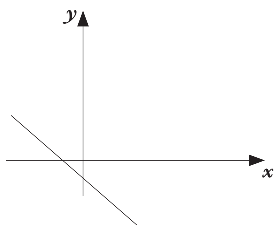
D) $y = 2x$

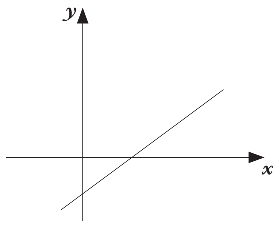
E) $y = -2x$

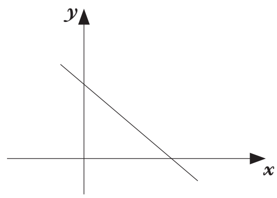
8. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (20,60) y el origen?

A) $y = 3x$
B) $y = 3x - 160$
C) $y = 3x - 60$
D) $y = -3x - 60$
E) $y = -3x$

9. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) recta(s) es(son) de pendiente y coeficiente de posición menores de cero?

I)


II)


III)


A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II, III

10. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) recta(s) corta(n) al eje Y en el punto $(0,5)$

I) $y = 5x - 5$ II) $y = 34x + 5$ III) $y - 2 = 23x + 3$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) I, II, III

11. ¿Cuál de las siguientes rectas es coincidente con $2y = 6x - 2$?

A) $y = 6x - 2$
B) $3y = 12x - 4$
C) $y = 3x - 2$
D) $y = 2x - 1$
E) $3y + 3 = 9x$

12. Si un alerce posee 3 ramas principales y 12 ramas secundarias y el mismo alerce tiempo después posee 5 ramas principales y 20 ramas secundarias, entonces si el crecimiento de las ramas primarias y secundarias se comporta linealmente, considerando las ramas principales como la variable independiente (x). ¿Cuál es la función que permite calcular el número de ramas secundarias cuando existen x ramas principales?

A) $y = 4x$
B) $y = 5x$
C) $y = 4x - 3$
D) $y = 4x - 12$
E) $y = x - 3$

13. Si un kilogramo de naranjas cuestan $y_1 = \$400$ y 3 kilogramos de naranja cuestan $y_2 = \$\ 800$, entonces si el precio de las naranjas se comporta linealmente, considerando los kilogramos como la variable independiente (x). ¿Cuál es la función que permite calcular el precio de x kilogramos de naranjas?

A) $y = 200x$
B) $y = 400x$
C) $y = 200x + 100$
D) $y = 200x + 200$
E) $y = 200x - 1$

14. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a $3y = 6x - 2$ y pasa por el punto de intersección con el eje de las ordenadas de $2y = 3x - 12$?

A) $y = 2x - 12$
B) $y = 2x - 6$
C) $y = -6x$
D) $y = 2x + 12$
E) $y = -6x + 2$

15. ¿Cuál de las siguientes rectas tiene pendiente 3 y pasa por el punto de intersección de $y = x$ e $y = 2x + 2$

A) $y = 3x$
B) $y = 3x + 2$
C) $y = 3x + 4$
D) $y = 3x + 8$
E) $y = x$

Respuestas

Preg.	Alternativa
1	B
2	C
3	A
4	E
5	C
6	D
7	E
8	A
9	A
10	D
11	E
12	A
13	D
14	B
15	C

Solucionario:

1. Alternativa correcta letra B)

$2y = 6x - 10$ (Dividiendo por 2 ambos lados de la ecuación, resulta)

$y = 3x - 5$ (Se tiene que la ecuación principal de la recta es del tipo "$y = mx + n$" donde n corresponde al coeficiente de posición, resulta)

$n = -5$ Luego dado que el coeficiente de posición posee abscisa 0, el punto de corte con el eje y corresponde a:

$(0, -5)$

2. Alternativa correcta letra C)

$3y = 6x + 12$ (Dividiendo por 3 ambos lados de la ecuación, resulta)

$y = 2x + 4$ "$y = mx + n$" donde m corresponde a la pendiente. Dos rectas son paralelas si sus pendientes, son iguales.

Luego, $y = 2x + 4$ es paralela solo con $y = 2x + 15$

3. Alternativa correcta letra A)

En la ecuación $y = 4x - 3$ el coeficiente de posición "n" es -3 por lo tanto la ordenada del punto de corte con el eje y es -3

4. Alternativa correcta letra E)

Recordando que en la ecuación principal de la recta $y = mx + n$, el valor de m corresponde a la pendiente de la recta y n es el coeficiente de posición.

La ecuación de la recta que posee pendiente 3 y coeficiente de posición -4, corresponde a

$y = 3x - 4$ (Multiplicando por 5, resulta)

$5y = 15x - 20$

5. Alternativa correcta letra C)

Si dos rectas son **perpendiculares** cuando el producto de sus pendientes es -1, tenemos que:

La pendiente de $y = 4x + 10$ es 4, y la pendiente de $y = \frac{-x}{4} + 3$ es $\frac{-1}{4}$

Y dado que $4 \cdot \frac{-1}{4} = -1$ y $= 4x + 10 \wedge y = \frac{-x}{4} + 3$ son perpendiculares

Por lo tanto $5y = 20x + 50$ es perpendicular sólo con III

6. Alternativa correcta letra D)

Recordando la ecuación punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

La ecuación de pendiente 7 que pasa por $(3, 4)$ corresponde a:

$y - 4 = 7(x - 3)$ (Multiplicando término a término el paréntesis, resulta)
$y - 4 = 7x - 21$ (Sumando 4 a ambos lados de la ecuación)
$y = 7x - 17$

7. Alternativa correcta letra E)

Recordando la ecuación de la recta a contar de dos puntos $y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$

Luego en la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(3,-6)$

$x_1 = -1, y_1 = 2$; $x_2 = 3, y_2 = -6$ (Si reemplazamos es la formula a contar de dos puntos, resulta)

$y - 2 = \frac{(-6 - 2)}{(3 + 1)}(x - 1)$ (Sumando los paréntesis)

$y - 2 = \frac{(-8)}{(4)}(x + 1)$ (Dividiendo -8 por 4)

$y - 2 = -2(x + 1)$ (Multiplicando termino a termino el paréntesis, resulta)

$y - 2 = -2x - 2$ (Sumando 2 a ambos lados de la ecuación resulta)

$y = -2x$

8. Alternativa correcta letra A)

Dado que el origen corresponde al punto $(0,0)$ y la ecuación de la recta a contar de dos puntos es: $y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$

Luego en la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(20,60)$, se determina

$x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = 20, y_2 = 60$ (Si reemplazamos es la formula a contar de dos puntos, resulta)

$y - 0 = \dfrac{(60 - 0)}{(20 - 0)}(x - 0)$ (Sumando los paréntesis)

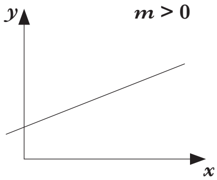
$y - 0 = \dfrac{(60)}{(20)}(x - 0)$ (Dividiendo 60 por 20)

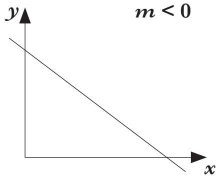
$y - 0 = 3(x - 0)$ (Sumando los ceros a ambos lados de la ecuación, resulta)

$y = 3x$

9. Alternativa correcta letra A)

Una recta de pendiente positiva y negativa corresponde en forma grafica respectivamente a:





Los coeficientes de posición negativos corresponden a rectas que cortan al eje Y bajo el origen, entonces el único grafico que satisface ambos requerimientos es sólo I)

10. Alternativa correcta letra D)

I. Posee coeficiente de posición -5, por lo tanto corta al eje Y en el punto $(0, -5)$
II. Posee coeficiente de posición 5, por lo tanto corta al eje Y en el punto $(0, 5)$
III. $y - 2 = 23x + 3$ (Si sumamos 2 a ambos lados de la ecuación, resulta)
$y = 23x + 5$

Con lo cuál posee coeficiente de posición 5 y por lo tanto corta al eje Y en el punto $(0, 5)$
Luego, sólo II y III satisfacen el enunciado

11. Alternativa correcta letra E) $3y + 3 = 9x$

Recordando que dos rectas son **coincidentes** cuando sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición iguales, o sea

$L_1 : y = m_1x + n_1 \quad \wedge \quad L_2 : y = m_2x + n_2,$

Entonces L_1 coincidente con L_2 sí y sólo si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$

$2y = 6x - 2$ (Simplificando por 2 ambos lados de la ecuación, resulta)
$y = 3x - 1$ (Si multiplicamos por 3 ambos lados de la ecuación, resulta)
$3y = 9x - 3$ (Finalmente sumando 3 a ambos lados de la ecuación, resulta)
$3y + 3 = 9x$

Por lo tanto $2y = 6x - 2$ es coincidente con $3y + 3 = 9x$

12. Alternativa correcta letra A)

El dato clave de este tipo de ejercicios, es la frase "se comporta linealmente" lo que quiere decir que con los datos podemos encontrar la forma principal de la línea recta, fórmula que al representarse como función corresponde a una función lineal, en este caso si consideramos las ramas principales como la variable independiente (x) y las ramas secundarias como la variable dependiente (y) ,podemos ordenar los datos en forma de puntos:

(3, 12) y (5, 20)

Luego, recordando la ecuación de la recta a contar de dos puntos

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

En la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3,12) y (5,20) si reemplazamos en la ecuación, resulta

$$y - 12 = \frac{(20 - 12)}{(5 - 3)}(x - 3)$$ (Restando los paréntesis)

$$y - 12 = \frac{(8)}{(2)}(x - 3)$$ (Dividiendo 8 por 2)

$$y - 12 = 4(x - 3)$$ (Multiplicando el paréntesis término a término)

$$y - 12 = 4x - 12$$ (Sumando 12 a ambos lados de la ecuación, resulta)

$$y = 4x$$

Por lo tanto, la función que permite calcular el número de ramas secundarias cuando existen x ramas principales es $f(x) = 4x$

13. Alternativa correcta letra D)

El dato clave de este tipo de ejercicios, es la frase "se comporta linealmente" lo que quiere decir que con los datos podemos encontrar la forma principal de la línea recta, formula que al ser representada como función corresponde a una función lineal, en este caso si consideramos los kilogramos como la variable independiente (x) y el precio como la variable dependiente (y) ,podemos ordenar los datos en forma de puntos:

(1, 400) y (3, 800)

Luego, recordando la ecuación de la recta a contar de dos puntos

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

En la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1{,}400)$ y $(3{,}800)$ si reemplazamos en la ecuación, resulta

$y - 400 = \dfrac{(800 - 400)}{(3 - 1)}(x - 1)$ (Restando los paréntesis)

$y - 400 = \dfrac{(400)}{(2)}(x - 1)$ (Dividiendo 400 por 2)

$y - 400 = 200\,(x - 1)$ (Multiplicando el paréntesis término a término)

$y - 400 = 200x - 200$ (Sumando 400 a ambos lados de la ecuación, resulta)

$y = 200x + 200$

Por lo tanto, la función que permite calcular el precio de x kilogramos de naranjas es

$f(x) = 200x + 200$

14. Alternativa correcta letra B)

$3y = 6x - 2$ (Simplificando por 3 a ambos lados de la ecuación, resulta)

$y = 2x - \dfrac{2}{3}$ (Recordando que en la ecuación principal de la recta $\boldsymbol{y = mx + n}$, el valor de m corresponde a la pendiente de la recta, y dado que dos rectas paralelas poseen la misma pendiente, la pendiente de la recta que buscamos es 2)

Recordando que la ordenada del punto de corte con el eje y, corresponde al coeficiente de posición y además que en una ecuación del tipo "$\boldsymbol{y = mx + n}$" $\boldsymbol{n}$ corresponde al coeficiente de posición, luego en

$2y = 3x - 12$ (Dividiendo por 2 a ambos lados de la ecuación, resulta)

$y = \dfrac{3x}{2} - 6$ (Luego el punto de intersección con el eje de las ordenadas es -6)

Por lo tanto estamos buscando la ecuación de una recta de pendiente 2 y coeficiente de posición -6 luego reemplazando en $\boldsymbol{y = mx + n}$, resulta

$y = 2x - 6$

15. Alternativa correcta letra C)

Para encontrar el punto de intersección de $y = x$ e $y = 2x + 2$ debemos tratar las ecuaciones como un sistema de ecuaciones, en donde la solución a dicho sistema corresponderá al punto de intersección de ambas rectas. Resolviendo el sistema

Si reemplazamos $y = x$ en $y = 2x + 2$

$x = 2x + 2$	(Restando 2 a ambos lados de la ecuación)
$x - 2 = 2x$	(Restando x a ambos lados de la ecuación, resulta)
$-2 = 2x - x$	(Resolviendo la resta)
$-2 = x$	(Luego, reemplazando en $y = 2x + 2$)
$y = 2 \cdot -2 + 2$	(Multiplicando)
$y = -4 + 2$	(Sumando, resulta)
$y = -2$	

Por lo tanto buscamos una recta que posee pendiente 3 que pase por el punto (-2, -2)

Recordando la ecuación punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$, resulta

$y + 2 = 3(x + 2)$	(Multiplicando el paréntesis termino a termino)
$y + 2 = 3x + 6$	(Restando 2 a ambos lados de la ecuación, resulta)
$y = 3x + 4$	

Mis notas

CEPECH

ESPECIALISTAS DE LA PSU

Grupo Educacional Cepech