



Matemática 2006

Tutorial Nivel Avanzado

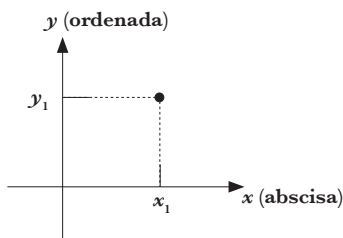
Geometría analítica II



Geometría analítica

Marco Teórico

1. Ejes cartesianos:



2. Distancia entre dos puntos:

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2) \Rightarrow d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3. Coordenadas del punto medio:

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2) \Rightarrow \text{Pto. medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

4. Ecuación de la recta:

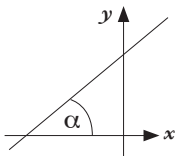
4.1 Ecuación general de la recta:

$$ax + by + c = 0$$

4.2 Ecuación principal de la recta:

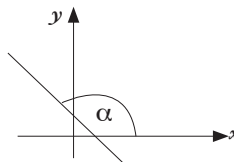
$y = mx + n$ donde m : pendiente, n : coeficiente de posición (punto donde la recta intersecta al eje y)

a) Si $m > 0$



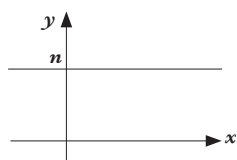
α : ángulo agudo

b) Si $m < 0$



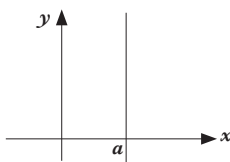
α : ángulo obtuso

c) Si $m = 0$



y : función constante, $y = n$

d) Si m indefinida



$x = a$

4.3 Pendiente dados dos puntos:

$$\text{Sean } A(x_1, y_1) \text{ y } B(x_2, y_2) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

5. Determinación de la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente:

$$\text{Sean } A(x_1, y_1) \text{ y } m \text{ conocida} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

6. Rectas paralelas:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

7. Rectas perpendiculares:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

8. Ecuación de la circunferencia:

8.1 Ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$$

$$\text{donde : } C = -2a, \quad D = -2b, \quad F = a^2 + b^2 - r^2$$

Centro : (a, b) y r : radio

8.2 Ecuación cartesiana de la circunferencia:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

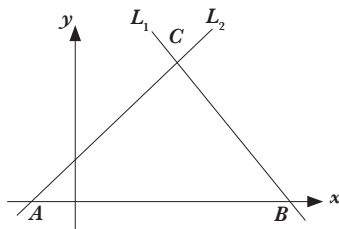
donde : Centro : (a, b) y r : radio

Ejercicios

1. ¿Cuál debe ser el valor de k para que la recta $5x + (8 - k)y + 2 = 0$, sea paralela a la recta $3x - 7y - 4 = 0$?
 - A) $\frac{-59}{3}$
 - B) $\frac{-41}{7}$
 - C) $\frac{11}{3}$
 - D) $\frac{41}{7}$
 - E) $\frac{59}{3}$
2. La ecuación, $(9 - k)x + 2y - 6 = 0$ representa una recta perpendicular a la recta cuya ecuación es $-3x + y - 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de k ?
 - A) $\frac{-25}{3}$
 - B) $\frac{-3}{25}$
 - C) $\frac{3}{25}$
 - D) $\frac{25}{3}$
 - E) 15
3. El punto (m, n) pertenece a la recta que es perpendicular a: $5y = -25x + 100$ y que además corta al eje de las ordenadas en el punto $y = 3n$. ¿Cuál es el valor de m en función de n ?
 - A) $-10n$
 - B) $\frac{-2}{5}n$
 - C) $\frac{2}{5}n$
 - D) $10n$
 - E) Ninguno de ellos

4. ¿Cuánto mide el área del $\triangle ABC$? $L_1 : 2x + 3y - 28 = 0$, $L_2 : -3x + 2y - 10 = 0$

- A) $\frac{3}{208}$
- B) $\frac{3}{416}$
- C) $\frac{128}{3}$
- D) $\frac{208}{3}$
- E) $\frac{416}{3}$



5. Sean A, B, C , vértices de un triángulo. ¿Cuál(es) de los siguientes triángulos es(son) isósceles?

- I. $A(-1,2), B(4,1), C(4,3)$
- II. $A(2,-2), B(-3,1), C(8,3)$
- III. $A(3,2), B(3,5), C(-1,2)$

- A) Sólo I
- B) Sólo I y II
- C) Sólo I y III
- D) Sólo II y III
- E) I, II y III

6. En el $\triangle ABC$, los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son respectivamente $(1,3)$, $(4,2)$ y $(-3,1)$. Hallar las coordenadas del vértice A .

- A) $(2,6)$
- B) $(0,4)$
- C) $(8,-2)$
- D) $(6,-10)$
- E) Ninguna de ellas

7. Sean los puntos $A(3,1)$, $B(5,1)$, $C(4,7)$. Determine la ecuación de la recta que es bisectriz del $\angle ACB$.
- A) $y - 1 = 0$
B) $x = 4$
C) $y = x - 1$
D) $y + 1 = 0$
E) $y = x + 1$
8. Sea una circunferencia con centro en el origen y radio 6. ¿Cuál de los siguientes pares ordenados no pertenece a la circunferencia?
- A) $(6,0)$
B) $(-2, 4\sqrt{2})$
C) $(\sqrt{5}, \sqrt{31})$
D) $(0,-6)$
E) $(-3,-5)$
9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia cuya ecuación es:
 $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 15$ y que pasa por el punto de tangencia $(1,2)$.
- A) $x - 2y - 5 = 0$
B) $x - 2y + 5 = 0$
C) $x + 2y - 5 = 0$
D) $x + 2y + 5 = 0$
E) $x - 2y - 3 = 0$
10. Determine el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 + 5x - 7y + k = 0$ represente a una circunferencia de radio 3.
- A) $\frac{2}{19}$
B) 9
C) $\frac{19}{2}$
D) $\frac{65}{4}$
E) 65

11. En una tienda comercial, por una compra de \$ 10.000 se regalan 2 cuadernos, y si la compra es de \$ 20.000 se regalan 5 cuadernos. Si esta promoción tiene un comportamiento lineal, ¿cuántos cuadernos se regalan si la compra es de \$ 150.000?
- A) 43 cuadernos
B) 44 cuadernos
C) 45 cuadernos
D) 46 cuadernos
E) Ninguna de ellas
12. En la sección de pastelería de un supermercado, el precio de costo de un pastel de selva negra es de \$ 350 y lo venden en \$ 570; el precio de costo de un pie de limón es de \$ 1.260 y lo venden en \$ 2.390. Si el comportamiento del aumento de precio es lineal, ¿cuál es el precio de venta de una tartaleta cuyo costo es de \$ 1.500?
- A) \$ 2.840
B) \$ 2.850
C) \$ 2.860
D) \$ 2.870
E) \$ 2.970
13. El valor de un auto nuevo es de \$ 5.280.000, al final del quinto año su valor depreciado es de \$ 3.080.000. Sabiendo que la depreciación es lineal, determine en cuántos años, el auto estará totalmente depreciado, es decir, sin valor.
- A) 8 años
B) 9 años
C) 10 años
D) 11 años
E) 12 años

14. El costo del agua potable se obtiene mediante un costo fijo y otro proporcional a la cantidad de m^3 gastados. Si un mes se pagó \$ 17.466 por 41 m^3 , y al mes siguiente \$ 15.395 por 36 m^3 . Si su comportamiento es lineal, ¿cuál es, aproximadamente, el costo fijo cobrado?
- A) \$ 490
 - B) \$ 500
 - C) \$ 550
 - D) \$ 555
 - E) \$ 560
15. Una casa nueva se compra en \$ 49.900.000, al cabo de 3 años, la casa vale \$ 55.000.000. Si el comportamiento es lineal, ¿al cabo de cuánto tiempo, aproximadamente, la casa valdrá el doble del precio del que fue comprada?
- A) 27 años
 - B) 28 años
 - C) 29 años
 - D) 31 años
 - E) 32 años

Respuestas

Preg.	Alternativa
1	E
2	D
3	A
4	D
5	A
6	E
7	B
8	E
9	C
10	C
11	B
12	D
13	E
14	A
15	C

Solucionario

1. La alternativa correcta es la letra E)

Para que la recta $5x + (8 - k)y + 2 = 0$ sea paralela a la recta $3x - 7y - 4 = 0$, sus pendientes deben ser iguales.

$$3x - 7y - 4 = 0 \quad (\text{Despejando } y)$$

$$7y = 3x - 4$$

$$y = \frac{3}{7}x - \frac{4}{7} \Rightarrow m = \frac{3}{7}$$

Luego, la pendiente de la recta $5x + (8 - k)y + 2 = 0$ debe ser $\frac{3}{7}$, es decir, $m = \frac{3}{7}$

$$5x + (8 - k)y + 2 = 0 \quad (\text{Despejando } y)$$

$$(8 - k)y = -5x - 2$$

$$y = \frac{-5}{8 - k}x - \frac{2}{8 - k} \Rightarrow m = \frac{-5}{8 - k} \quad (\text{Reemplazando } m)$$

$$\frac{3}{7} = \frac{-5}{8 - k} \quad (\text{Multiplicando cruzado})$$

$$3(8 - k) = -35 \quad (\text{Distribuyendo})$$

$$24 - 3k = -35 \quad (\text{Despejando } k)$$

$$3k = 59$$

$$k = \frac{59}{3}$$

$\therefore$ Para que las rectas sean paralelas k debe ser $\frac{59}{3}$

2. La alternativa correcta es la letra D)

Para que la recta $(9 - k)x + 2y - 6 = 0$ sea perpendicular a la recta $-3x + y - 1 = 0$, el producto de sus pendientes debe ser -1

$$-3x + y - 1 = 0 \quad (\text{Despejando } y)$$

$$y = 3x + 1 \Rightarrow m = 3$$

Luego, la pendiente de la recta $(9 - k)x + 2y - 6 = 0$ debe ser $-\frac{1}{3}$, es decir, $m = -\frac{1}{3}$

$$(9 - k)x + 2y - 6 = 0$$

(Despejando y)

$$2y = -(9 - k)x + 6$$

$$y = \frac{-(9 - k)}{2}x + \frac{6}{2} \Rightarrow m = \frac{-(9 - k)}{2} \quad (\text{Reemplazando } m)$$

$$\frac{-1}{3} = \frac{-(9 - k)}{2} \quad (\text{Multiplicando cruzado})$$

$$-2 = 3(k - 9) \quad (\text{Distribuyendo})$$

$$-2 = 3k - 27 \quad (\text{Despejando } k)$$

$$k = \frac{25}{3}$$

$\therefore$ Para que las rectas sean perpendiculares k debe ser $\frac{25}{3}$

3. La alternativa correcta es la letra A)

$$5y = -25x + 100$$

(Despejando y)

$$y = -5x + 20 \Rightarrow m = -5$$

(m, n) pertenece a la recta que es perpendicular a: $y = -5x + 20$

$\Rightarrow m = \frac{1}{5}$ y corta al eje y en $y = 3n$, es decir, en el punto $(0, 3n)$

Encontrando la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3n = \frac{1}{5}(x - 0)$$

(Despejando y)

$$y = \frac{1}{5}x + 3n$$

(Reemplazando x por m e y por n , ya que (m, n) pertenece a la recta)

$$n = \frac{1}{5}m + 3n \quad / \cdot 5$$

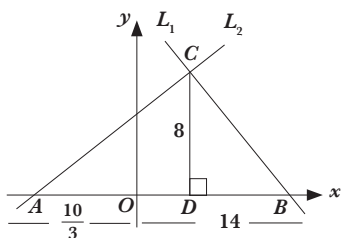
$$5n = m + 15n$$

(Despejando m)

$$m = -10n$$

$$\therefore m = -10n$$

4. La alternativa correcta es la letra D)



$$L_1: 2x + 3y - 28 = 0$$

$$L_2: -3x + 2y - 10 = 0$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2}$$

Para determinar las coordenadas de C , encontraremos el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 .

$$\begin{array}{r|l} 2x + 3y = 28 & / \cdot 3 \\ -3x + 2y = 10 & / \cdot 2 \end{array}$$

(Eliminando x)

$$\begin{array}{r|l} 6x + 9y = 84 \\ -6x + 4y = 20 \end{array}$$

(Sumando ambas ecuaciones)

$$\begin{array}{l} 13y = 104 \\ y = 8 \end{array}$$

(Despejando y , simplificando)

$$\begin{array}{l} \text{Reemplazando } y \text{ en } -3x + 2y = 10 \\ -3x + 2 \cdot 8 = 10 \\ x = 2 \end{array}$$

(Multiplicando y despejando x)

$$\text{Por lo tanto, } C(2,8) \Rightarrow \overline{CD} = 8$$

Para determinar $\overline{OB}$, encontraremos el punto de intersección de L_1 con el eje x .

$$2x + 3y - 28 = 0$$

(Despejando y)

$$3y = -2x + 28$$

$$y = \frac{-2}{3}x + \frac{28}{3}$$

(Reemplazando y por 0)

$$0 = \frac{-2}{3}x + \frac{28}{3} \quad / \cdot 3$$

$$0 = -2x + 28$$

(Despejando x)

$$x = 14$$

$$\therefore B(0,14) \Rightarrow \overline{OB} = 14$$

Para determinar $\overline{AO}$, encontraremos el punto de intersección de L_2 con el eje x .

$$-3x + 2y - 10 = 0 \quad (\text{Despejando } y)$$

$$2y = 3x + 10$$

$$y = \frac{3}{2}x + 5 \quad (\text{Reemplazando } y \text{ por } 0)$$

$$0 = \frac{3}{2}x + 5 \quad / \cdot 2$$

$$0 = 3x + 10 \quad (\text{Despejando } x)$$

$$x = \frac{-10}{3}$$

$$\therefore A\left(0, \frac{-10}{3}\right) \Rightarrow \overline{AO} = \frac{10}{3}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} + \overline{AO} \quad (\text{Reemplazando } \overline{OB} \text{ y } \overline{AO})$$

$$\overline{AB} = 14 + \frac{10}{3} \quad (\text{Sumando fracciones})$$

$$\overline{AB} = \frac{52}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Área } \triangle ABC = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} \quad (\text{Reemplazando } \overline{AB} \text{ y } \overline{CD})$$

$$= \frac{52}{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{Simplificando y multiplicando})$$

$$= \frac{208}{3}$$

$$\therefore \text{Área } \triangle ABC = \frac{208}{3}$$

5. La alternativa correcta es la letra A)

Para determinar si el $\triangle ABC$ es isósceles, dos lados deben ser iguales.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

I. $A(-1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$ (Aplicando la fórmula de la distancia)

$$\overline{AB} = \sqrt{(4+1)^2 + (1-2)^2} \quad (\text{Resolviendo paréntesis})$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (-1)^2}$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$\overline{AB} = \sqrt{26}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-4)^2 + (3-1)^2}$$

(Resolviendo paréntesis)

$$= \sqrt{(0)^2 + (2)^2}$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$= \sqrt{4}$$

(Aplicando raíz)

$$\overline{BC} = 2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4+1)^2 + (3-2)^2}$$

(Resolviendo paréntesis)

$$= \sqrt{(5)^2 + (1)^2}$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$\overline{AC} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$$

$\therefore \triangle ABC$ isósceles

II. $A(2, -2)$, $B(-3, 1)$, $C(8, 3)$

(Aplicando la fórmula de la distancia)

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-2)^2 + (1+2)^2}$$

(Resolviendo paréntesis)

$$= \sqrt{(-5)^2 + (3)^2}$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$\overline{AB} = \sqrt{34}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(8+3)^2 + (3-1)^2}$$

(Resolviendo paréntesis)

$$= \sqrt{(11)^2 + (2)^2}$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$= \sqrt{125}$$

(Descomponiendo la raíz)

$$\overline{BC} = 5\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(8-2)^2 + (3+2)^2}$$

(Resolviendo paréntesis)

$$= \sqrt{(6)^2 + (5)^2}$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$\overline{AC} = \sqrt{61}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$$

$\therefore \triangle ABC$ no es isósceles

III. $A(3, 2)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 2)$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(3-3)^2 + (5-2)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{9}\end{aligned}$$

$$\overline{AB} = 3$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25}\end{aligned}$$

$$\overline{BC} = 5$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{(-1-3)^2 + (2-2)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{16}\end{aligned}$$

$$\overline{AC} = 4$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$$

$\therefore \triangle ABC$ no es isósceles

(Aplicando la fórmula de la distancia)

(Resolviendo paréntesis)

(Aplicando potencias y sumando)

(Aplicando raíz)

(Resolviendo paréntesis)

(Aplicando potencias y sumando)

(Aplicando raíz)

(Resolviendo paréntesis)

(Aplicando potencias y sumando)

(Aplicando raíz)

$\therefore$ Sólo en **I**, $\triangle ABC$ isósceles

6. La alternativa correcta es la letra E)

$$\text{Pto. medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

$$\text{Pto. Medio } \overline{AB} = (1, 3) \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 3 \Rightarrow y_1 + y_2 = 6$$

$$\text{Pto. Medio } \overline{AC} = (4,2) \Rightarrow \frac{x_1 + x_3}{2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 = 8$$

$$\frac{y_1 + y_3}{2} = 2 \Rightarrow y_1 + y_3 = 4$$

$$\text{Pto. Medio } \overline{BC} = (-3,1) \Rightarrow \frac{x_2 + x_3}{2} = -3 \Rightarrow x_2 + x_3 = -6$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = 1 \Rightarrow y_2 + y_3 = 2$$

$$\begin{array}{l} 1) \ x_1 + x_2 = 2 \\ 2) \ x_1 + x_3 = 8 \\ 3) \ x_2 + x_3 = -6 \end{array}$$

$$\text{De 2) y 3)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_3 = -6 \end{array} \quad / \cdot -1$$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 8 \\ -x_2 - x_3 = 6 \\ 4) \ x_1 - x_2 = 14 \end{array}$$

(Sumando ambas ecuaciones)

$$\text{De 1) y 4)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 14 \end{array}$$

(Sumando ambas ecuaciones)

$$\begin{array}{l} 2x_1 = 16 \\ x_1 = 8 \end{array}$$

(Despejando x_1)

$$\begin{array}{l} 1) \ y_1 + y_2 = 6 \\ 2) \ y_1 + y_3 = 4 \\ 3) \ y_2 + y_3 = 2 \end{array}$$

$$\text{De 2) y 3)} \quad \begin{array}{l} y_1 + y_3 = 4 \\ y_2 + y_3 = 2 \end{array} \quad / \cdot -1$$

$$\begin{array}{l} y_1 + y_3 = 4 \\ -y_2 - y_3 = -2 \\ 4) \ y_1 - y_2 = 2 \end{array}$$

(Sumando ambas ecuaciones)

$$\text{De 1) y 4)} \quad \begin{array}{l} y_1 + y_2 = 4 \\ y_1 - y_2 = 2 \end{array}$$

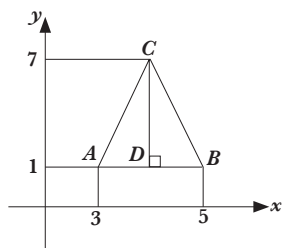
(Sumando ambas ecuaciones)

$$\begin{array}{l} 2y_1 = 6 \\ y_1 = 3 \end{array}$$

(Despejando y_1)

$$\Rightarrow A(x_1, y_1) \quad \therefore A(8, 3)$$

7. La alternativa correcta es la letra B)



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (7 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (6)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{37}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4 - 5)^2 + (7 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (6)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{37}$$

(Resolviendo paréntesis)

(Aplicando potencias y sumando)

(Resolviendo paréntesis)

(Aplicando potencias y sumando)

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC} \therefore \triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB} \Rightarrow$ si $\overline{CD}$ es bisectriz $\Rightarrow \overline{CD}$ altura y transversal de gravedad

$\Rightarrow D$ punto medio $\therefore \overline{AD} = 1 \Rightarrow D(4, 1)$

$\overline{AB} \parallel$ Eje $x \therefore m = 0$ y la designaremos $m_2 = 0$

Como $\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ (Reemplazando m_2)

$$m_1 \cdot 0 = -1$$

m_1 no existe

$\therefore$ La ecuación de la recta que es bisectriz del $\angle ACB$ es $x = 4$

8. La alternativa correcta es la letra E)

Ecuación cartesiana de la circunferencia:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

donde : Centro : (a, b) y r : radio

Sea una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 6

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

(Reemplazando a, b y r)

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

(Aplicando potencias)

$$x^2 + y^2 = 36$$

Para que un punto pertenezca a la circunferencia, al reemplazar x e y en la ecuación se debe cumplir la igualdad.

A) $(6,0)$

$$x^2 + y^2 = 36$$

(Reemplazando x e y)

$$6^2 + 0^2$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$36 \Rightarrow (6,0) \text{ pertenece a la } \otimes$$

B) $(-2, 4\sqrt{2})$

$$x^2 + y^2 = 36$$

(Reemplazando x e y)

$$(-2)^2 + (4\sqrt{2})^2$$

(Aplicando potencias)

$$4 + 16 \cdot 2$$

(Multiplicando y sumando)

$$36 \Rightarrow (-2, 4\sqrt{2}) \text{ pertenece a la } \otimes$$

C) $(\sqrt{5}, \sqrt{31})$

$$x^2 + y^2 = 36$$

(Reemplazando x e y)

$$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{31})^2$$

(Aplicando potencias)

$$5 + 31$$

(Sumando)

$$36 \Rightarrow (\sqrt{5}, \sqrt{31}) \text{ pertenece a la } \otimes$$

D) $(0, -6)$

$$x^2 + y^2 = 36$$

(Reemplazando x e y)

$$0^2 + (-6)^2$$

(Aplicando potencias y sumando)

$$36 \Rightarrow (0, -6) \text{ pertenece a la } \otimes$$

$$\therefore (-3, -5) \text{ no pertenece a la } \otimes$$

9. La alternativa correcta es la letra C)

Ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$$

donde : $C = -2a$, $D = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$

Centro : (a, b) y r : radio

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 15$$

(Expresando de la forma general)

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$$

$$C = 2, D = 4, F = -15$$

$$C = -2a$$

(Reemplazando C)

$$2 = -2a$$

(Despejando a)

$$a = -1$$

$$D = -2b$$

(Reemplazando D)

$$4 = -2b$$

(Despejando b)

$$b = -2$$

$\therefore$ Centro $(-1, -2)$

Debemos encontrar la ecuación de la recta tangente a la $\otimes$ y que pasa por punto de tangencia $(1, 2)$. Como debe ser tangente, entonces el producto de sus pendientes debe ser -1 .

Determinaremos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(Reemplazando x_1, x_2, y_1, y_2)

$$m = \frac{2 - (-2)}{1 - (-1)}$$

(Eliminando paréntesis y sumando)

$$m = \frac{4}{2} \Rightarrow m = 2 \quad \therefore m_1 = \frac{-1}{2}$$

Determinaremos la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y que tiene pendiente $\frac{-1}{2}$

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

(Reemplazando m, x_1, y_1)

$$y - 2 = \frac{-1}{2} (x - 1) \quad / \cdot 2$$

$$2y - 4 = -1(x - 1)$$

(Eliminando paréntesis)

$$2y - 4 = -x + 1$$

(Expresando de la forma general)

$$2y + x - 4 - 1 = 0$$

(Sumando)

$$2y + x - 5 = 0$$

$\therefore$ La ecuación de la recta tangente a la circunferencia y que pasa por el punto $(1, 2)$ es:

$$2y + x - 5 = 0$$

10. La alternativa correcta es la letra C)

Ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$$

donde : $C = -2a$, $D = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$

Centro : (a, b) y r : radio

$$x^2 + y^2 + 5x - 7y + k = 0 \quad \text{radio: } 3$$

$$C = 5, D = -7, F = k$$

$$C = -2a$$

(Reemplazando C)

$$5 = -2a$$

(Despejando a)

$$a = \frac{-5}{2}$$

$$D = -2b$$

(Reemplazando D)

$$-7 = -2b$$

(Despejando b)

$$b = \frac{7}{2}$$

$$F = a^2 + b^2 - r^2$$

(Reemplazando F, a, b, r)

$$k = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3^2$$

(Aplicando potencias)

$$k = \frac{25}{4} + \frac{49}{4} - 9$$

(Sumando fracciones)

$$k = \frac{74}{4} - 9$$

(Sumando)

$$k = \frac{74 - 36}{4}$$

$$k = \frac{38}{4}$$

(Simplificando)

$$k = \frac{19}{2}$$

$\therefore$ Para que la ecuación $x^2 + y^2 + 5x - 7y + k = 0$ represente a una $\odot$ de radio 3, $k = \frac{19}{2}$

11. La alternativa correcta es la letra B)

Como estamos en presencia de un comportamiento lineal, aplicaremos geometría analítica, es decir, utilizaremos $y - y_1 = m (x - x_1)$

Nuestros pares ordenados serán (\$, cuadernos)

$$\Rightarrow (\$ 10000, 2) \quad (20000, 5)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Reemplazando } x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$m = \frac{5 - 2}{20000 - 10000} \quad (\text{Restando})$$

$$m = \frac{3}{10000}$$

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad (\text{Reemplazando } m, x_1, y_1)$$

$$y - 2 = \frac{3}{10000} (x - 10000) \quad (\text{Distribuyendo y simplificando})$$

$$y - 2 = \frac{3}{10000} x - 3 \quad (\text{Despejando } y)$$

$$y = \frac{3}{10000} x - 1$$

Si la compra es de \$ 150000, determinaremos a cuántos cuadernos equivale, $(150000, y)$

Sabemos que la ecuación que representa este comportamiento lineal es:

$$y = \frac{3}{10000} x - 1 \quad (\text{Reemplazando } x)$$

$$y = \frac{3}{10000} \cdot 150000 - 1 \quad (\text{Simplificando})$$

$$y = 45 - 1$$

$$y = 44$$

$\therefore$ Si la compra es de \$ 150.000 se regalan 44 cuadernos.

12. La alternativa correcta es la letra D)

Como estamos en presencia de un comportamiento lineal, aplicaremos geometría analítica, es decir, utilizaremos $y - y_1 = m (x - x_1)$

Nuestros pares ordenados serán (precio costo, precio venta)

$$\Rightarrow (350, 570) \quad (1260, 2390)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Reemplazando } x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$m = \frac{2390 - 570}{1260 - 350} \quad (\text{Restando})$$

$$m = \frac{1820}{910} \quad (\text{Simplificando})$$

$$m = 2$$

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad (\text{Reemplazando } m, x_1, y_1)$$

$$y - 570 = 2 (x - 350) \quad (\text{Distribuyendo})$$

$$y - 570 = 2x - 700 \quad (\text{Despejando } y)$$

$$y = 2x - 130$$

Si el precio de costo de una tartaleta es de \$ 1500, determinaremos cuál es el precio de venta, $(1500, y)$

Sabemos que la ecuación que representa este comportamiento lineal es:

$$y = 2x - 130 \quad (\text{Reemplazando } x)$$

$$y = 2 \cdot 1500 - 130 \quad (\text{Multiplicando } y \text{ restando})$$

$$y = 2870$$

$\therefore$ Si el precio de costo de una tartaleta es de \$ 1.500, su precio de venta es de \$ 2.870.

13. La alternativa correcta es la letra E)

Como estamos en presencia de un comportamiento lineal, aplicaremos geometría analítica, es decir, utilizaremos $y - y_1 = m (x - x_1)$

Nuestros pares ordenados serán (años, \$)

$$(0, \$5280000) \quad (5, \$3080000)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Reemplazando } x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$m = \frac{3080000 - 5280000}{5 - 0} \quad (\text{Restando})$$

$$m = \frac{-2200000}{5} \quad (\text{Simplificando})$$

$$m = -440000$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (\text{Reemplazando } m, x_1, y_1)$$

$$y - 528000 = -440000(x - 0) \quad (\text{Distribuyendo})$$

$$y - 528000 = -440000x \quad (\text{Despejando } y)$$

$$y = -440000x + 528000$$

Determinaremos en cuántos años el auto estará totalmente depreciado, es decir, sin valor, entonces, $y = 0$.

Sabemos que la ecuación que representa este comportamiento lineal es:

$$y = -440000x + 528000 \quad (\text{Reemplazando } y)$$

$$0 = -440000x + 5280000 \quad (\text{Despejando } x)$$

$$x = \frac{5280000}{440000} \quad (\text{Simplificando})$$

$$x = 12$$

∴ El auto estará totalmente depreciado a los 12 años.

14. La alternativa correcta es la letra A)

Como estamos en presencia de un comportamiento lineal, aplicaremos geometría analítica, es decir, utilizaremos $y - y_1 = m(x - x_1)$

Nuestros pares ordenados serán $(m^3, \$)$

$$(41, 17466) \quad (36, 15395)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Reemplazando } x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$m = \frac{15395 - 17466}{36 - 41} \quad (\text{Restando})$$

$$m = \frac{-2071}{-5} \quad (\text{Simplificando})$$

$$m = 414,2$$

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad (\text{Reemplazando } m, x_1, y_1)$$

$$y - 17466 = 414,2 (x - 41) \quad (\text{Distribuyendo})$$

$$y - 17466 = 414,2 x - 16982,2 \quad (\text{Despejando } y)$$

$$y = 414,2 x + 483,8$$

∴ El costo fijo es aproximadamente \$ 484, la alternativa que más se acerca es A)

15. La alternativa correcta es la letra C)

Como estamos en presencia de un comportamiento lineal, aplicaremos geometría analítica, es decir, utilizaremos $y - y_1 = m (x - x_1)$

Nuestros pares ordenados serán (años, \$)

$$(0, \$49900000) \quad (3, \$55000000)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Reemplazando } x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$m = \frac{55000000 - 49900000}{3 - 0} \quad (\text{Restando})$$

$$m = \frac{5100000}{3} \quad (\text{Simplificando})$$

$$m = 1700000$$

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad (\text{Reemplazando } m, x_1, y_1)$$

$$y - 49900000 = 1700000 (x - 0) \quad (\text{Distribuyendo})$$

$$y - 49900000 = 1700000 x \quad (\text{Despejando } y)$$

$$y = 1700000 x + 49900000$$

Si le costó \$ 49900000, el doble es \$ 99800000.

$$(x, 99800000)$$

Sabemos que la ecuación que representa este comportamiento lineal es:

$$y = 1700000 x + 49900000 \quad (\text{Reemplazando } y)$$

$$99800000 = 1700000 x + 49900000 \quad (\text{Despejando } x)$$

$$x = \frac{49900000}{1700000} \quad (\text{Simplificando})$$

$$x = 29,35$$

∴ La casa valdrá el doble a los 29,4 años aproximadamente, la alternativa que más se acerca es C)

CEPECH

ESPECIALISTAS DE LA PSU

Grupo Educacional Cepech