Tutorial
MT-a4

Matemática 2006

Tutorial Nivel Avanzado

Figuras inscritas y circunscritas

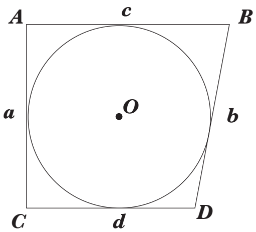
CEPECH
ESPECIALISTAS DE LA PSU
Grupo Educacional Cepech

Figuras inscritas y circunscritas

1. **Figuras inscritas:** Se dice que un polígono está inscrito en otro, cuando cada uno de los vértices de la figura inscrita toca los lados respectivos de la figura en la que se inscribe. Además se dice que un polígono está inscrito en un círculo, cuando cada ángulo de la figura inscrita toca la circunferencia del círculo.

2. **Figuras circunscritas:** De manera semejante, se dice que una figura está circunscrita en torno de otra figura, cuando cada lado de la figura circunscrita toca los vértices respectivos de la figura a la que circunscribe.

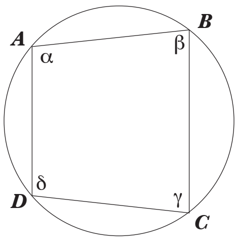
1. Cuadrilátero circunscrito a circunferencia.



Sí $ABCD$ cuadrilátero circunscrito a circunferencia de centro O, se cumple que:

$a + b = c + d$

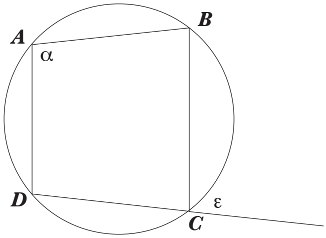
2. Cuadrilátero inscrito en circunferencia.



Sí $ABCD$ cuadrilátero inscrito en circunferencia de centro O, se cumple que:

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

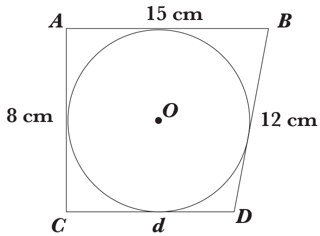
3. Ángulo exterior en un cuadrilátero inscrito en circunferencia.



Sí *ABCD* cuadrilátero inscrito en circunferencia de centro *O*, se cumple que: $\alpha = \varepsilon$

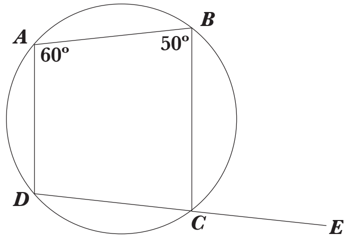
Ejercicios:

1. En la figura *ABCD* cuadrilátero circunscrito a circunferencia de centro *O*, d =



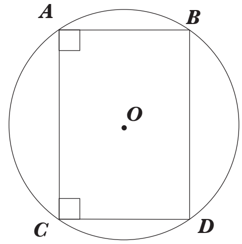
A) 5 cm
B) 8 cm
C) 12 cm
D) 18 cm
E) 20 cm

2. En la figura *ABCD* cuadrilátero inscrito en circunferencia de centro *O*, y *D*, *C*, *E* son colineales, ángulo *ECB* + ángulo *CDA* =



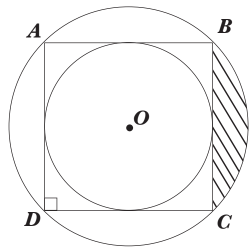
A) 50°
B) 60°
C) 130°
D) 180°
E) 190°

3. En la figura $ABDC$ es cuadrilátero inscrito en circunferencia de centro O, en donde $\overline{AC} = \overline{CD} = 5$ cm, entonces $\overline{BC}$ =



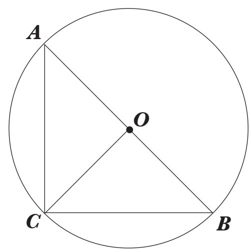
A) 5 cm
B) $5\sqrt{2}$ cm
C) 10 cm
D) $10\sqrt{2}$ cm
E) Falta información

4. En la figura $ABCD$ es paralelogramo circunscrito a circunferencia de centro O, e inscrito a otra circunferencia mayor concéntrica con la primera. En donde $\overline{AD} = \overline{CD} = 8$ cm, entonces el área achurada =



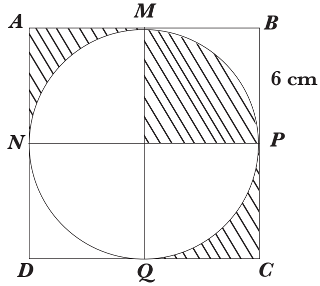
A) 16 cm^2
B) 12 cm^2
C) 8π cm^2
D) $8(\pi - 2)$ cm^2
E) $8(\pi - 16)$ cm^2

5. $\overline{AB}$ es diámetro de circunferencia de centro O, si el radio de la circunferencia mide 4 cm y el ángulo BAC mide 30°. Área del triángulo ABC =



A) 16 cm^2
B) $16\sqrt{2}$ cm^2
C) $16\sqrt{3}$ cm^2
D) $8\sqrt{3}$ cm^2
E) Falta información

6. Sí $ABCD$ es cuadrado circunscrito a circunferencia, y M, N, P, Q son los puntos donde la circunferencia esta inscrita, área achurada =



A) 36 cm²
B) 9π cm²
C) $9(4 - \pi)$ cm²
D) $36 + 9\pi$ cm²
E) $9(8 - \pi)$ cm²

7. Una piscina cuadrada de diagonal $6\sqrt{2}$ metros, se quiere decorar en su interior con un circulo de guirnaldas florales flotantes, ¿cuál es la cantidad de metros lineales de guirnalda que se utilizaran, si la piscina se quiere decorar con el mayor circulo de guirnaldas flotantes posible?

A) 6π metros
B) 9π metros²
C) 12π metros
D) 6 metros
E) 36π metros

8. Un escudo familiar esta formado por seis circunferencias congruentes inscritas entre sí en un rectángulo de 8 cm de ancho y 12 cm de largo cm indica la figura, ¿cuánto mide el área achurada?

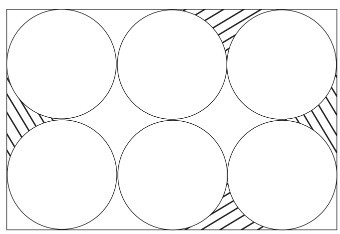
A) $\dfrac{96 - 24\pi}{6}$ cm²

B) $32 - 8\pi$ cm²

C) $96 - 24\pi$ cm²

D) 24π cm²

E) 96 cm²



9. ¿Cuál es el volumen de una esfera inscrita en un cubo de volumen 216 cm^3?

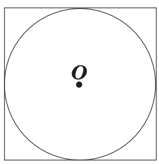
A) 3π cm^3
B) 9π cm^3
C) 36π cm^2
D) 36π cm^3
E) 108π cm^3

10. Si un *CD* de radio 4 cm, esta inscrito a su caja cuadrada, ¿cuál es el área **no** ocupada por el *CD*?

A) 16π cm^2
B) $16 - 16\pi$ cm^2
C) $16(4 - \pi)$ cm^2
D) 64π cm^2
E) $64 - 4\pi$ cm^2

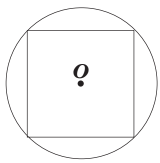
11. ¿Cuál(es) de las siguiente(s) figura(s) representa(n) a una circunferencia inscrita en un cuadrilátero?

I.



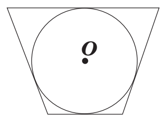
O: centro de circunferencia

II.



O: centro de circunferencia

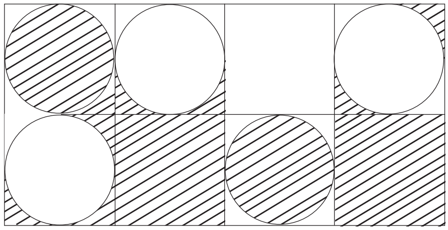
III.



O: centro de circunferencia

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

12. Una cava de vino con capacidad para 8 botellas, esta formada por cuadrados congruentes de 7 cm de lado cada uno, como muestra la figura, si la cava esta ocupada con cinco botellas (circunscritas a cada cuadrado), ¿cuánto mide el área achurada?



A) 49 cm^2

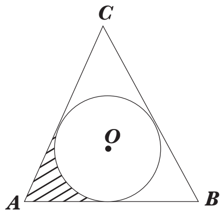
B) $49\pi \text{ cm}^2$

C) $98 + \frac{49}{2}\pi \text{ cm}^2$

D) $196 - \frac{49}{16}\pi \text{ cm}^2$

E) 196 cm^2

13. En la figura ABC triángulo equilátero circunscrito a circunferencia de centro O y radio $4\sqrt{3}$ cm, área achurada =



A) $12\sqrt{3}$ cm

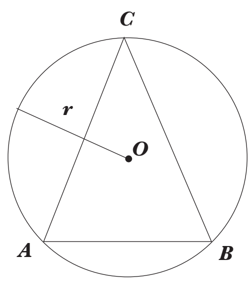
B) $\frac{144\sqrt{3} - 48\pi}{3} \text{ cm}^2$

C) $144\sqrt{3} - 48\pi \text{ cm}^2$

D) $48\pi \text{ cm}^2$

E) $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$

14. Sí ABC es triángulo equilátero inscrito en circunferencia de centro O, y radio $6\sqrt{3}$ cm. Perímetro ABC =



A) $54\sqrt{3}$ cm

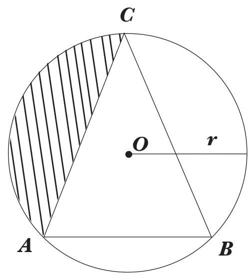
B) 54 cm

C) $36\sqrt{3}$ cm

D) $18\sqrt{3}$ cm

E) 18 cm

15. Sí ABC es triángulo equilátero inscrito en circunferencia de centro O, y radio 10 cm. Área achurada =



A) $75\sqrt{3}$ cm²

B) $75\pi\sqrt{3}$ cm²

C) $\frac{100\pi}{3} - 75\sqrt{3}$ cm²

D) $100 - 25\sqrt{3}$ cm²

E) $\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}$ cm²

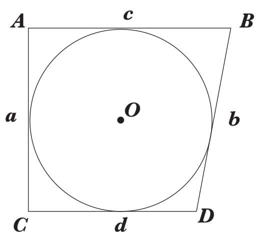
Respuestas

Preg.	Alternativa
1	A
2	E
3	B
4	D
5	D
6	E
7	A
8	B
9	D
10	C
11	D
12	E
13	B
14	B
15	E

Solucionario

1. Alternativa correcta letra A)

   Dado que:

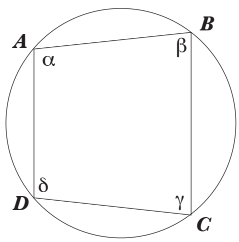


Sí $ABCD$ cuadrilátero circunscrito a circunferencia de centro O, se cumple que:
$a + b = c + d$

entonces en la figura, $15 + d = 12 + 8$ (Despejando)
$d = 5$

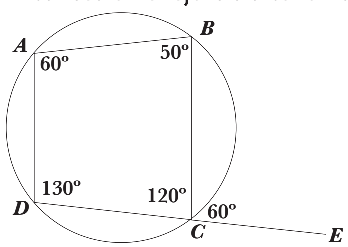
2. Alternativa correcta letra E)

   Dado que:



Sí $ABCD$ cuadrilátero inscrito en circunferencia de centro O, se cumple que:
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

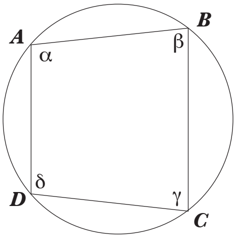
Entonces en el ejercicio tenemos que:



Luego ángulo $ECB = 60°$
ángulo $CDA = 130°$
entonces ángulo ECB + ángulo $CDA = 190°$

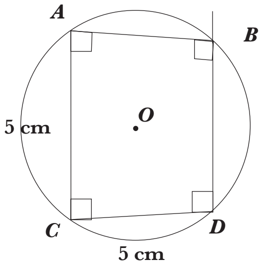
3. Alternativa correcta letra B)

Dado que:



Sí $ABCD$ cuadrilátero inscrito en circunferencia de centro O, se cumple que:
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

y además como $\overline{AC} = \overline{CD} = 5$ cm ,tenemos que:

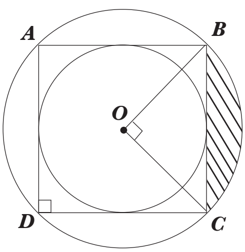


Con lo que podemos deducir que $ABDC$ es un cuadrado de lado 5, luego aplicando que diagonal cuadrado = lado $\sqrt{2}$

tenemos que $\overline{BC} = 5\sqrt{2}$ cm

4. Alternativa correcta letra D)

Utilizando las propiedades de cuadriláteros inscritos vistas en los ejercicios pasados, y además sabiendo que $ABCD$ es un paralelogramo, podemos deducir que se trata de un cuadrado de lado 8 cm, por lo que sus diagonales son perpendiculares y miden $8\sqrt{2}$ cm cada una, gráficamente:



En donde podemos observar que:
$\overline{BO} = \overline{CO} = 4\sqrt{2}$ radio de circunferencia

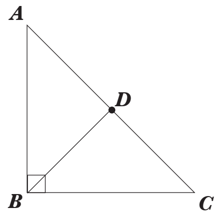
Entonces área achurada = Área sector circular COB – área triángulo BCO

área achurada = $\dfrac{r^2 \cdot \pi}{4} - \dfrac{\overline{BO} \cdot \overline{CO}}{2}$

área achurada = $8\pi - 16 = 8(\pi - 2)$ cm^2

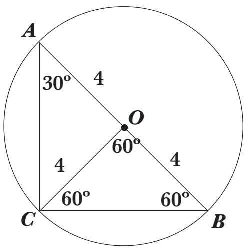
5. Alternativa correcta letra D)

Sí $\overline{AB}$ es diámetro entonces el triángulo ABC esta inscrito en media circunferencia y es por lo tanto rectángulo, por lo que podemos utilizar la propiedad siguiente:



Si $\overline{BD}$ es t_b ,entonces $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BD}$

Completando estos datos en la figura



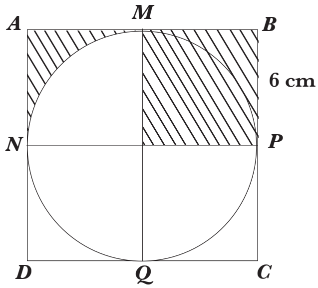
Con lo cuál comprobamos que BCO es equilátero y el trazo BC mide también 4 cm, utilizando Pitágoras (ó utilizando medio triángulo equilátero) descubrimos que el trazo AC mide $4\sqrt{3}$

Luego el área $ABC = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{3}$ cm^2

6. Alternativa correcta letra E)

Sí $ABCD$ es cuadrado circunscrito a circunferencia, entonces los puntos $M, N, P, Q,$ son puntos medios, dado lo cuál podemos decir que $ABCD$ esta dividido en cuatro cuadrados más pequeños de área 36 cm^2 cada uno, además el área de cada uno de los dos sectores circulares que aparecen achurados en la figura equivalen al área de $ABCD$ menos el área de la circunferencia partido en 4, o sea $(144 - 36\pi)/4 = 36 - 9\pi$ cm^2.

Además si reordenamos los sectores achurados resulta que:



Con lo cual el área achurada se simplifica a $36 + (36 - 9\pi) = 72 - 9\pi = 9(8 - \pi)$ cm^2

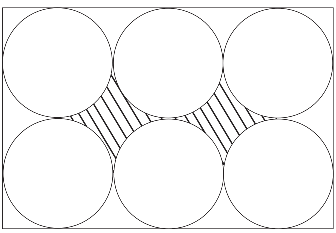
7. Alternativa correcta letra A)

   Si tenemos una piscina cuadrada de diagonal $6\sqrt{2}$ metros, entonces su lado mide 6 metros, además el mayor circulo que cabe en un cuadrado corresponde a una circunferencia circunscrita, que tendrá por lo tanto un diámetro igual al largo de la piscina o sea 6 metros y por lo tanto un radio de 3 metros. Entonces solo nos queda entender la frase “metros lineales” que hace referencia a un perímetro en este caso el perímetro de la guirnalda de flores que se calcula con la formula $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 6\pi$ metros de guirnalda

8. Alternativa correcta letra B)

   Un escudo familiar esta formado por seis circunferencias congruentes inscritas entre sí en un rectángulo de 8 cm de ancho y 12 cm de largo cm indica la figura, ¿cuánto mide el área achurada?

   Con los datos primero calculamos el área del rectángulo que forma este escudo familiar, área que equivale a 96 cm^2. Luego ya que las circunferencias congruentes están inscritas entre sí, podemos afirmar que cada una posee diámetro 4 cm y radio 2 cm, con lo cuál el área de cada una es de 4π cm^2, y el área de las 6 es de 24π cm^2. Entonces el área **no** ocupada por los círculos corresponde a $96 - 24\pi$ cm^2, además si reordenamos los sectores achurados a forma de rompecabezas tenemos que:



Que si nos fijamos con calma equivale a la tercera parte del área **no** ocupada por los círculos, o sea a $\frac{96 - 24\pi}{6} = 32 - 8\pi$ cm^2

9. Alternativa correcta letra D)

Si el cubo tiene un volumen de 216 cm^3, como el volumen del cubo se calcula al elevar a 3 la arista de la misma, calculamos que el valor de la arista es de 6 cm. Ya que la esfera esta inscrita en el cubo asumimos que el diámetro de la misma es igual a la arista del cubo o sea 6 cm, y su radio por lo tanto es 3 cm Luego utilizando la formula de volumen de esfera:

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (3)^3}{3} = 36\pi \text{ cm}^3$$

10. Alternativa correcta letra C)

Si un CD de radio 4 cm, esta inscrito a su caja cuadrada, ¿cuál es el área no ocupada por el CD?

Si el CD posee radio 4 cm, su área es 16π cm^2, además como esta inscrito en su caja el lado de la caja es igual al diámetro del CD, o sea 8 cm, luego el área de la caja es 64 cm^2, finalmente el área de la caja no ocupada por el CD, es igual al área de la caja menos el área del CD:

área de la caja no ocupada por el $CD = 64$ cm$^2 - 16\pi$ cm$^2 = 16(4 - \pi)$ cm^2

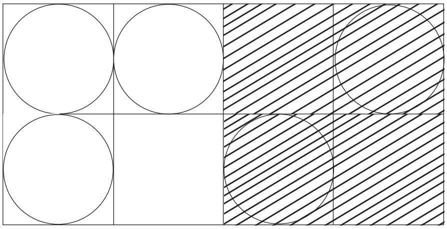
11. Alternativa correcta letra D)

Un polígono está inscrito en un círculo, cuando cada ángulo de la figura inscrita toca la circunferencia del círculo.

Dado esta definición sólo I y III corresponden a circunferencias inscritas, en II la circunferencia esta circunscrita.

12. Alternativa correcta letra E)

Si reordenamos las zonas achuradas tenemos:



Que corresponde exactamente a 4 de los cuadrados de lado 7, cada uno de área 49 cm^2, es decir que el área achurada corresponde a $49 \cdot 4 = 196$ cm^2

13. Alternativa correcta letra B)

Utilizando la propiedad que nos indica que el radio de un circunferencia inscrita en un triángulo equilátero equivale a un tercio de la altura del triángulo, descubrimos que la altura del triángulo equilátero equivale a $12\sqrt{3}$ cm , además aplicando la definición de altura de triángulo equilátero tenemos que:

altura de triángulo equilátero = lado $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. (Reemplazando)

$12\sqrt{3}$ = lado $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Despejando)

24 = Lado

Utilizando la formula de área de triángulo equilátero = lado$^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (Reemplazando)

Área = $24^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (Desarrollando)

Área = $144\sqrt{3}$ cm^2

Además ya que el área del circulo corresponde a $(4\sqrt{3})^2 \cdot \pi = 48\pi$ cm^2

Tenemos que el área no ocupada por el círculo corresponde a:

$144\sqrt{3} - 48\pi$ cm^2

finalmente, ya que el área que buscamos corresponde a un tercio de esta, el área en cuestión corresponde a $(144\sqrt{3} - 48\pi) / 3$ cm^2

14. Alternativa correcta letra B)

Utilizando la propiedad que nos indica que el radio de un circunferencia circunscrita en un triángulo equilátero equivale a dos tercios de la altura del triángulo, descubrimos que la altura del triángulo equilátero equivale a $9\sqrt{3}$ cm , además aplicando la definición de altura de triángulo equilátero tenemos que:

altura de triángulo equilátero = lado $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. (Reemplazando)

$9\sqrt{3}$ = lado $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Despejando)

Lado = 18 cm

Luego ya que el triángulo es equilátero el perímetro equivale a $18 \cdot 3 = 54$ cm^2

15. Alternativa correcta letra E)

Utilizando la propiedad que nos indica que el radio de un circunferencia circunscrita en un triángulo equilátero equivale a dos tercios de la altura del triángulo, descubrimos que la altura del triángulo equilátero equivale a 15 cm , además aplicando la definición de altura de triángulo equilátero tenemos que:

altura de triángulo equilátero = lado $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. (Reemplazando)

15 = lado $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Despejando)

Lado = $\dfrac{30}{\sqrt{3}}$ (Racionalizando)

Lado = $10\sqrt{3}$ cm

Utilizando la formula de área de triángulo equilátero = lado$^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (Reemplazando)

Área = $(10\sqrt{3})^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (Desarrollando)

Área = $75\sqrt{3}$ cm^2

Además ya que el área del circulo corresponde a $(10)^2 \cdot \pi = 100\pi$ cm^2

Tenemos que el área no ocupada por el circulo corresponde a:

$75\sqrt{3} - 100\pi$ cm^2

inalmente, ya que el área que buscamos corresponde a un tercio de esta, el área en cuestión corresponde a $(75\sqrt{3} - 100\pi) / 3$ cm^2 =

$\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}$ cm^2