Tutorial
MT-a1

Matemática 2006

Tutorial Nivel Avanzado

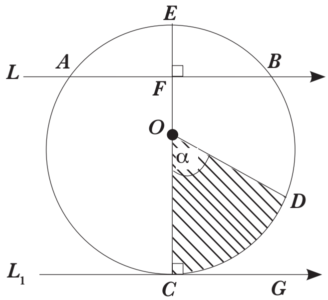
Circunferencia y círculo II

CEPECH
ESPECIALISTAS DE LA PSU
Grupo Educacional Cepech

Circunferencia y círculo

Marco Teórico

1. Elementos de la circunferencia y del círculo:



O: centro de la circunferencia.

$\overline{OC}$: radio

$\overline{AB}$: cuerda

$\overline{EC}$: diámetro

L : secante

L_1: tangente ($\overline{OC} \perp \overline{CG}$)

$\overline{EF}$: sagita $\Rightarrow$ F punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{EO} \perp \overline{AB}$ y si $\overline{AB}$ es un lado de un polígono regular inscrito a la circunferencia $\Rightarrow$ $\overline{FO}$ apotema.

$\overset{\frown}{CD}$: arco de la circunferencia (siempre se leen en sentido contrario a los punteros del reloj). Como es una parte de la circunferencia, se puede determinar su perímetro o su medida en grados, ya que la circunferencia completa mide 360°

COD : sector circular

2. Áreas y perímetros: (considerando el dibujo anterior)

Sea r : radio, d : diámetro

2.1 Perímetro de la circunferencia: $P = 2\pi r = \pi \cdot d$

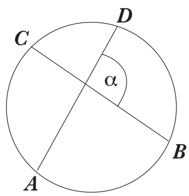
2.2 Área del círculo: $A = \pi \cdot r^2$

2.3 Área sector circular: $A = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$, α ángulo del centro

3. Teoremas:

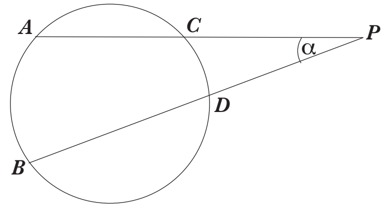
3.1 Ángulo interior:

$$\alpha = \frac{arco CA + arco BD}{2}$$



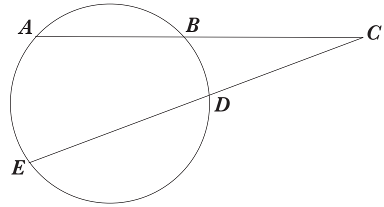
3.2 Ángulo exterior:

$$\alpha = \frac{arco AB - arco\ DC}{2}$$



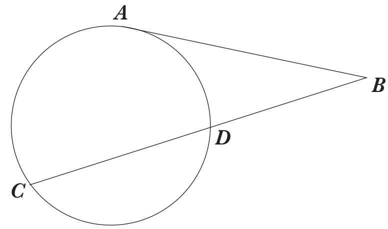
3.3 Secantes: sean $\overline{AC}$ y $\overline{EC}$ secantes

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{EC} \cdot \overline{DC}$$



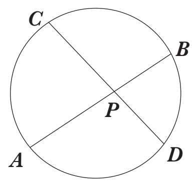
3.4 Secante y tangente: sean $\overline{AB}$ tangente y $\overline{CB}$ secante

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$



3.5 Cuerdas:

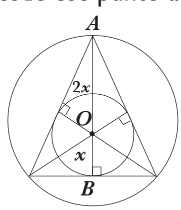
$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$



4. Generalidades:

En el triángulo equilátero se cumple que todas las rectas notables son iguales y coinciden. Entonces el ortocentro es centro de gravedad del triángulo, centro de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyo radio es la distancia desde ese punto a cada vértice, centro de la circunferencia inscrita al triángulo cuyo radio es la distancia desde ese punto a cada lado.

Por lo tanto: radio circunferencia inscrita: x
radio circunferencia circunscrita: $2x$

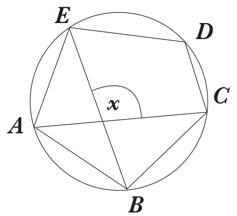


$\overline{OA} = 2\mathbf{x}$

$\overline{OB} = \mathbf{x}$

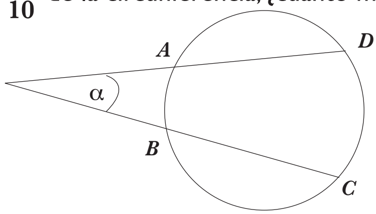
Ejercicios

1. Sea *ABCDE* pentágono regular, ¿cuánto mide x?



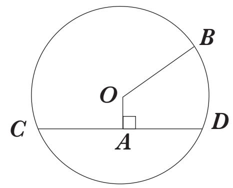
A) $54°$
B) $90°$
C) $108°$
D) $150°$
E) $216°$

2. Sea arco $CD = \dfrac{1}{8}$ de la circunferencia, arco $AB = \dfrac{1}{10}$ de la circunferencia, ¿cuánto mide α?



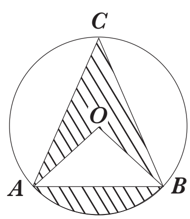
A) $4{,}5°$
B) $9°$
C) $40{,}5°$
D) $81°$
E) Ninguno de ellos

3. Determine $\overline{CD}$, sabiendo que $\overline{OB} = 6$ cm, $\overline{OA} = 2$ cm, O centro de la circunferencia.



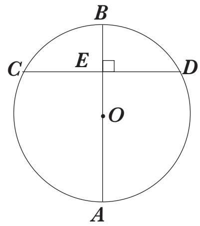
A) $4\sqrt{2}$ cm
B) $8\sqrt{2}$ cm
C) $2\sqrt{10}$ cm
D) $4\sqrt{10}$ cm
E) Ninguno de ellos

4. Sea Δ *ABC* equilátero cuya altura mide $9\sqrt{3}$ cm. Determine el área achurada. O centro de la $\otimes$.



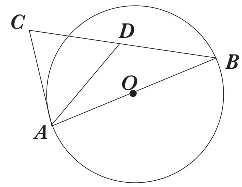
A) $(9\sqrt{3} + 9\pi)$ cm^2
B) $(27\sqrt{3} + 9\pi)$ cm^2
C) $(27\sqrt{3} + 18\pi)$ cm^2
D) $(27\sqrt{3} + 36\pi)$ cm^2
E) $(54\sqrt{3} + 36\pi)$ cm^2

5. En la circunferencia de centro O, $\overline{BE} = 6$, $\overline{CD} = 24$. Si $\overline{AB}$ diámetro, determine el radio de la circunferencia.



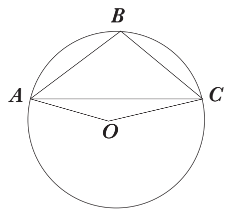
A) 9
B) 15
C) 18
D) 24
E) 30

6. Sea $\overline{CA} = 7$ cm (tangente a la ⊗ en A), $\overline{AB}$ diámetro de la ⊗ de centro O y radio 7 cm, D punto medio de $\overline{BC}$. ¿Cuánto mide $\overline{AD}$?



A) 7 cm
B) $\frac{7}{2}$ cm
C) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ cm
D) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ cm
E) $\frac{7}{2}\sqrt{5}$ cm

7. En la ⊗ de centro O y radio 10 cm, los Δs AOC y ABC isósceles congruentes. ¿Cuánto mide $\overline{AC}$?



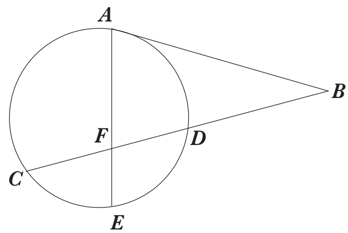
A) $5\sqrt{2}$ cm
B) $10\sqrt{2}$ cm
C) $10\sqrt{3}$ cm
D) $20\sqrt{2}$ cm
E) $20\sqrt{3}$ cm

8. Desde un punto situado a 128 cm del centro de una circunferencia de radio 47 cm, se traza una tangente a la circunferencia. ¿Cuál es su magnitud ?

A) $5\sqrt{7}$ cm
B) $9\sqrt{7}$ cm
C) $24\sqrt{7}$ cm
D) $40\sqrt{7}$ cm
E) $45\sqrt{7}$ cm

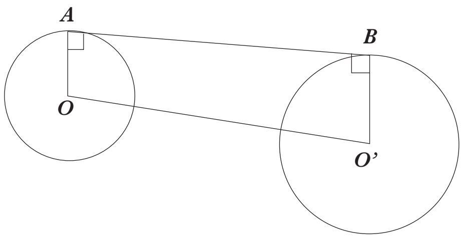
9. Sea $\overline{AB}$ = 8 cm (tangente a la ⊗ en A), $\overline{BC}$ = 32 cm, $\overline{AF}$ = 25 cm, $\overline{EF}$ = 5 cm. Si $\overline{FD} > \overline{FC}$, ¿cuánto mide $\overline{FD}$?

A) 4 cm
B) 5 cm
C) 10 cm
D) 25 cm
E) Ninguno de ellos



10. Sean la circunferencias de centro O y radio 6 cm, centro O' y radio 12 cm, $\overline{OO'}$ = 24 cm. ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?

A) $6\sqrt{15}$ cm
B) $18\sqrt{15}$ cm
C) $36\sqrt{15}$ cm
D) 540 cm
E) Ninguno de ellos



11. Sea ΔABC inscrito en una semicircunferencia, donde $\overline{AB}$ diámetro, $\overline{AC}$ es el triple de $\overline{BC}$. Si $\overline{BC} = x$, determine la distancia desde donde cae h_c en la hipotenusa hasta B.

A) $\frac{x}{10}\sqrt{5}$

B) $\frac{x}{2}\sqrt{5}$

C) $\frac{x}{10}\sqrt{10}$

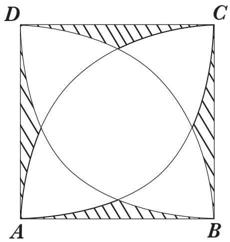
D) $\frac{x}{2}\sqrt{10}$

E) $x\sqrt{10}$

12. Dos cuerdas se cortan al interior de una circunferencia, cuyo radio es 11 cm. El producto de los 2 segmentos de una de ellas es 40 cm^2. ¿Cuál es la distancia entre el punto de intersección de las cuerdas y el centro de la circunferencia? (Una de las cuerdas es el diámetro)

A) 2 cm
B) 9 cm
C) 15 cm
D) 19 cm
E) 20 cm

13. En el cuadrado $ABCD$ se han inscrito 4 cuartos de circunferencia, de los cuales el lado del cuadrado coincide con su radio. Si el lado del cuadrado es x, ¿ cuánto mide el área achurada?



A) $x^2(1 - \pi)$

B) $x^2(12\pi - 8)$

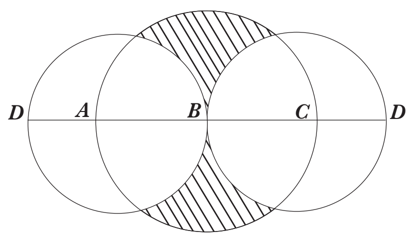
C) $x^2(6\pi - 12\sqrt{3})$

D) $x^2(4 - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3})$

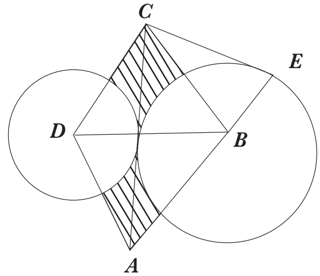
E) Falta información

14. En la figura, $\overline{DA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CE} = 6$, además $\overline{DE}$ es colineal con el diámetro de las 3 ⊗s. ¿Cuánto mide el área achurada?

A) $36\pi - 36\sqrt{3}$
B) $36\sqrt{3} - 12\pi$
C) $44\pi - 36\sqrt{3}$
D) Otro valor
E) Falta información



15. En la figura, $ABCD$ rombo, B y D centros de las circunferencias tangentes entre sí. Si $\overline{CE} = 1$, $\overline{AC} = 2$, $\overline{CE}$ tangente a la circunferencia en E, A, B, E colineales. ¿Cuánto mide el área achurada?



A) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3} - \dfrac{2}{9}\pi$

B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\pi}{9}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{2\pi}{9}$

D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{8\pi}{9}$

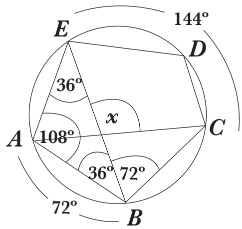
E) Falta información

Respuestas

Preg.	Alternativa
1	C
2	A
3	B
4	D
5	B
6	E
7	C
8	E
9	D
10	A
11	C
12	B
13	D
14	B
15	A

Solucionario

1. La alternativa correcta es la letra C)



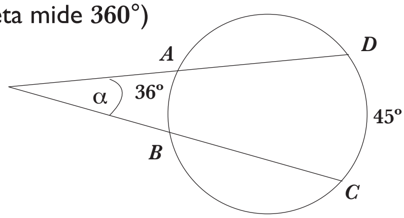
$ABCDE$ pentágono $\Rightarrow$ Si = 540°	(Si = 180°(n – 2))
$\angle\, BAE$ = 108°	($ABCDE$ pentágono regular)
$\Delta\, BAE$ isósceles en A $\Rightarrow \angle\, AEB$ = 36°	($\overline{AE} = \overline{AB}$)
$\therefore$ arco AB = 72°	(Mide la mitad del arco que subtiende)
Por otro lado $\angle\, CBE$ = 72°	($\angle\, EBA$ = 36° y $\angle\, CBA$ = 108°)
$\Rightarrow$ arco CE = 144°	(Mide el doble del $\angle$ inscrito que subtiende ese arco)
x: $\angle$ interior	(Por teorema del $\angle$ interior)
$x = \dfrac{arcoCE + arco\ AB}{2}$	(Reemplazando)
$x = \dfrac{144 + 72}{2}$	(Resolviendo)
$x = 108$	

$\therefore\ x = 108°$

2. La alternativa correcta es la letra A)

arco $CD = \dfrac{1}{8}$ de la $\otimes = \dfrac{1}{8} \cdot 360°$ (La $\otimes$ completa mide 360°)

$\therefore$ arco CD = 45°



arco $AB = \dfrac{1}{10}$ de la $\otimes = \dfrac{1}{10} \cdot 360°$ (La $\otimes$ completa mide 360°)

$\therefore$ arco AB = 36°

α : $\angle$ exterior (Por teorema del $\angle$ exterior)

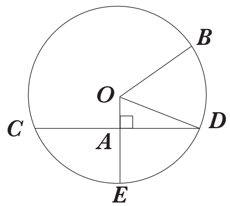
$\alpha = \dfrac{arco CD - arco AB}{2}$ (Reemplazando)

$\alpha = \dfrac{45 - 36}{2}$ (Resolviendo)

$\alpha = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ \alpha = 4{,}5°$

3. La alternativa correcta es la letra B)



$\overline{OA} = 2$, radio de la circunferencia 6 cm

$\overline{OD} = 6$ (Radio)

$\overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2$ (Pitágoras en $\Delta\ OAD$, reemplazando)

$6^2 = 2^2 + \overline{AD}^2$ (Resolviendo potencias)

$36 = 4 + \overline{AD}^2$ (Despejando $\overline{AD}$)

$32 = \overline{AD}^2 \quad / \cdot \sqrt{\ }$

$\sqrt{32} = \overline{AD}$ (Descomponiendo la raíz)

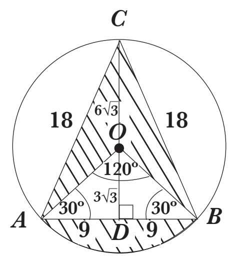
$\sqrt{16 \cdot 2} = \overline{AD}$ (Separando raíces)

$4\sqrt{2} = \overline{AD}$

Como $\overline{OA} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{CA} = \overline{AD}$ ($\overline{AE}$ sagita)

$\therefore\ \overline{CD} = 8\sqrt{2}$ cm

4. La alternativa correcta es la letra D)



Si la altura del $\Delta\, ABC$ equilátero es $9\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB} = 18$

Como $\overline{CD} = 9\sqrt{3}$ y es altura, también es transversal de gravedad $\Rightarrow O$ centro de gravedad y D punto medio de $\overline{AB}$

$\therefore\ \overline{OC} = 6\sqrt{3}$ (radio de la ⊗), $\overline{OD} = 3\sqrt{3}$, $\overline{AD} = 9$, $\overline{DB} = 9$

Además, $\overline{AO}$ bisectriz $\Rightarrow \angle\, BAO = 30°$ y como $\Delta\, AOB$ isósceles en $O \Rightarrow \angle\, AOB = 120°$(que corresponde a $\frac{1}{3}$ del área del círculo)

Área achurada = (Área $\Delta\, ABC$ – Área $\Delta\, AOB$) +(Área sector circular AOB – Área $\Delta\, AOB$)
Reemplazando:

Área achurada = $\left(\frac{18^2}{4}\sqrt{3} - \frac{18 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 - \frac{18 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\right)$ (Desarrollando)

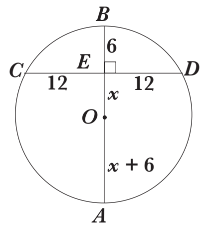
$= 81\sqrt{3} - 27\sqrt{3} + 36\pi - 27\sqrt{3}$ (Reduciendo términos semejantes)

Área achurada = $27\sqrt{3} + 36\pi$

$\therefore$ Área achurada = $(27\sqrt{3} + 36\pi)\ \text{cm}^2$

5. La alternativa correcta es la letra B)

$\overline{BE} = 6$, $\overline{CD} = 24 \Rightarrow \overline{CE} = 12$, $\overline{ED} = 12$ ($\overline{BE}$ sagita)



Si $\overline{EO} = x \Rightarrow \overline{OA} = x + 6$ (radio)

Entonces aplicando teorema de las cuerdas:

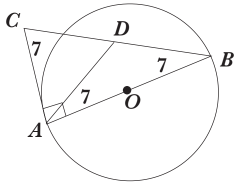
$(2x + 6) \cdot 6 = 12 \cdot 12$ (Resolviendo)
$12x + 36 = 144$ (Despejando x)
$12x = 108$

$x = \frac{108}{12}$

$x = 9 \quad \Rightarrow \overline{OA} = 9 + 6 = 15$

$\therefore$ Radio de la circunferencia 15 cm

6. La alternativa correcta es la letra E)



Radio de la ⊗ es 7 cm $\Rightarrow \overline{AB} = 14$ ($\overline{AB}$ diámetro)

$\overline{CA}$ tangente en $A \Rightarrow \Delta\ CBA$ rectángulo en A (Aplicando Pitágoras)

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ (Reemplazando)

$\overline{BC}^2 = 7^2 + 14^2$ (Resolviendo potencias)

$\overline{BC}^2 = 49 + 196$

$\overline{BC}^2 = 245 \quad / \cdot\sqrt{\ }$

$\overline{BC} = \sqrt{245}$ (Descomponiendo la raíz)

$\overline{BC} = \sqrt{49 \cdot 5}$ (Separando raíces)

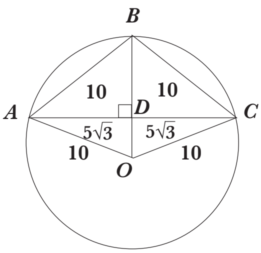
$\overline{BC} = 7\sqrt{5}$

Además, como $\Delta\ BCA$ rectángulo y $D = \frac{7}{2}\sqrt{5}$ punto medio de la hipotenusa $\Rightarrow$ se cumple que:

$\overline{CD} = \overline{DB} = \overline{AD}$

$\therefore\ \overline{AD} = \frac{7}{2}\sqrt{5}$ cm

7. La alternativa correcta es la letra C)



O centro de la ⊗ y radio 10 cm $\Rightarrow \overline{OA} = \overline{OC} = \overline{BC} = \overline{AB} = 10$ (Radios)

$\Rightarrow AOCB$ rombo, entonces sus diagonales son perpendiculares y se dimidian

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{DC}$

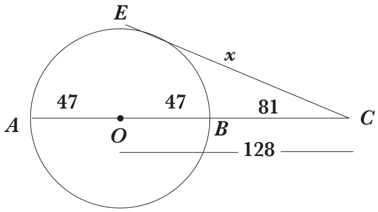
Por otro lado, $\Delta\, AOB$ equilátero, ya que $\overline{BO} = 10$ (Radio)

$\Rightarrow \overline{AD} = 5\sqrt{3}$ (Altura del Δ)

Como $\overline{AD} = \overline{DC} \Rightarrow \overline{AC} = 10\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC} = 10\sqrt{3}$

8. La alternativa correcta es la letra E)



Sea $\overline{EC} = x$ tangente y $\overline{AC}$ secante.

Como $\overline{OC} = 128$ cm y el radio de la $\otimes$ es 47 cm $\Rightarrow \overline{BC} = 81$ cm, O centro de la $\otimes$

Entonces, aplicando teorema de la tangente y secante:

$x^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$ (Reemplazando)

$x^2 = 175 \cdot 81 \; / \cdot \sqrt{\;}$

$x = \sqrt{175 \cdot 81}$ (Separando raíces)

$x = 9\sqrt{175}$ (Descomponiendo la raíz)

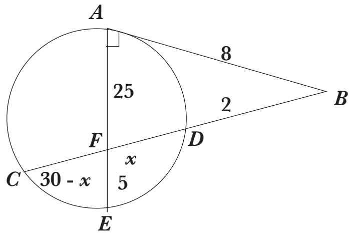
$x = 9\sqrt{25 \cdot 7}$ (Separando raíces)

$x = 9 \cdot 5\sqrt{7}$

$x = 45\sqrt{7}$

$\therefore$ La tangente mide $45\sqrt{7}$ cm

9. La alternativa correcta es la letra D)



$\overline{AB} = 8,\ \overline{BC} = 32,\ \overline{AF} = 25,\ \overline{EF} = 5$

a) Como $\overline{AB}$ tangente $\Rightarrow \angle\, EAB = 90°$ (Aplicando teorema de la tangente y secante)

$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DB}$ (Reemplazando)

$8^2 = 32 \cdot \overline{DB}$ (Resolviendo potencias y despejando $\overline{DB}$)

$\dfrac{64}{32} = \overline{DB}$

$\overline{DB} = 2$

b) Como $\overline{BC} = 32 \Rightarrow \overline{CD} = 30$

Sea $\overline{FD} = x \Rightarrow \overline{CF} = 30 - x$ (Aplicando teorema de las cuerdas)

$\overline{AF} \cdot \overline{FE} = \overline{CF} \cdot \overline{FD}$ (Reemplazando)

$25 \cdot 5 = (30 - x) \cdot x$ (Resolviendo)

$125 = 30x - x^2$ (Igualando a 0)

$x^2 - 30x + 125 = 0$ (Factorizando)

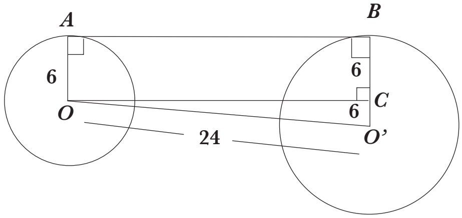
$(x - 25)(x - 5) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 25,\quad x_2 = 5$

$\Rightarrow \overline{FD} = 25$ ó $\overline{FD} = 5$

Pero $\overline{FD} > \overline{FC} \Rightarrow \overline{FD}$ no puede tomar el valor 5 $\quad\therefore\ \overline{FD} = 25$ cm

10. La alternativa correcta es la letra A)



$\overline{OO'} = 24,\ \overline{OA} = 6,\ \overline{O'B} = 12$

Trazando $\overline{OC} \perp \overline{O'B}$, se forma el $\Delta\ OCO'$ rectángulo

$\overline{BC} = 6 \Rightarrow \overline{O'C} = 6$ (Aplicando Pitágoras en $\Delta\ OCO'$)

$\overline{OO'}^2 = \overline{O'C}^2 + \overline{OC}^2$ (Reemplazando)

$24^2 = 6^2 + \overline{OC}^2$

$576 = 36 + \overline{OC}^2$ (Despejando $\overline{OC}^2$)

$576 - 36 = \overline{OC}^2$ (Resolviendo)

$540 = \overline{OC}^2 \quad / \cdot \sqrt{\ }$

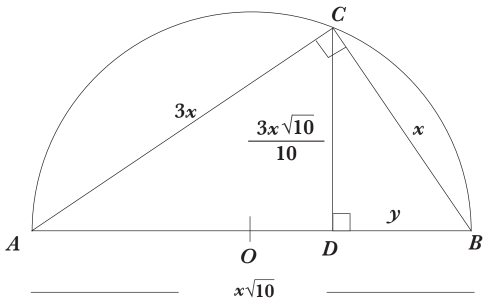
$\overline{OC} = \sqrt{540}$ (Descomponiendo la raíz)

$\overline{OC} = \sqrt{36 \cdot 15}$ (Separando raíces)

$\overline{OC} = 6\sqrt{15}$

$\therefore\ \overline{AB} = 6\sqrt{15}$ cm

11. La alternativa correcta es la letra C)



$\Delta\ ABC$ inscrito en una semicircunferencia, donde $\overline{AB}$ diámetro $\Rightarrow \Delta\ ABC$ rectángulo en C, $\overline{CD} = h_c$, entonces, la distancia desde donde cae h_c hasta B es $\overline{DB}$ (que es lo que nos piden).

Sea $\overline{DB} = y$, $\overline{BC} = x \Rightarrow \overline{AC} = 3x$ (ya que es el triple de $\overline{BC}$)

a) Aplicando Euclides, el correspondiente a la altura:

$$\overline{CD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} \qquad \text{(Reemplazando)}$$

$$\overline{CD} = \frac{3x \cdot x}{x\sqrt{10}} \qquad \text{(Simplificando)}$$

$$\overline{CD} = \frac{3x}{\sqrt{10}} \qquad \text{(Racionalizando)}$$

$$\overline{CD} = \frac{3x\sqrt{10}}{10}$$

b) Aplicando Pitágoras en el $\Delta\, CDB$ rectángulo en D:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 \qquad \text{(Reemplazando)}$$

$$x^2 = \left(\frac{3x\sqrt{10}}{10}\right)^2 + y^2 \qquad \text{(Desarrollando el paréntesis)}$$

$$x^2 = \frac{9x^2 \cdot 10}{100} + y^2 \qquad \text{(Simplificando)}$$

$$x^2 = \frac{9x^2}{10} + y^2 \qquad \text{(Despejando } y^2\text{)}$$

$$x^2 - \frac{9x^2}{10} = y^2 \qquad \text{(Restando fracciones)}$$

$$\frac{10x^2 - 9x^2}{10} = y^2 \qquad \text{(Reduciendo términos semejantes)}$$

$$\frac{x^2}{10} = y^2 \qquad / \cdot\sqrt{}$$

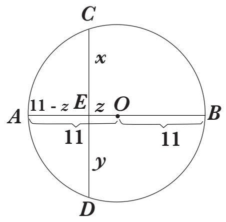
$$\frac{x}{\sqrt{10}} = y \qquad \text{(Racionalizando)}$$

$$\frac{x\sqrt{10}}{10} = y$$

Como $y = \overline{DB} \Rightarrow \overline{DB} = \dfrac{x\sqrt{10}}{10}$

$\therefore$ La distancia desde donde cae h_c en la hipotenusa hasta B es $\dfrac{x\sqrt{10}}{10}$

12. La alternativa correcta es la letra B)



Sea O centro de la ⊗, cuyo radio es 11 cm, $\overline{AB}$ diámetro, $\overline{EC} = x$, $\overline{ED} = y$, $\overline{OA} = 11$, $\overline{OB} = 11$, E punto de intersección de las cuerdas, $\overline{OE}$ distancia entre el punto de intersección de las cuerdas y el centro de la circunferencia, $\overline{OE} = z$, $\overline{AE} = 11 - z$, $\overline{CE} \cdot \overline{ED} = 40$, $\overline{EB} = 11 + z$.

Aplicando teorema de las cuerdas:

$\overline{CE} \cdot \overline{ED} = \overline{AE} \cdot \overline{EB}$ (Reemplazando)

$40 = (11 - z)(11 + z)$ (Aplicando suma por diferencia)

$40 = 121 - z^2$ (Despejando z^2)

$z^2 = 121 - 40$

$z^2 = 81 \quad / \cdot \sqrt{\ }$

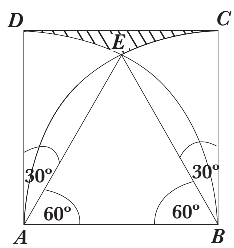
$z = \sqrt{81}$

$z = 9$

$\therefore \ \overline{OE} = 9$ cm

13. La alternativa correcta es la letra D)

Considerando una parte de la figura:



Al trazar $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$, se tiene que $\Delta\, AEB$ equilátero de lado x, ya que $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{AB} = x$ (radios) $\Rightarrow \angle\, BAE = 60°$ y $\angle\, EAD = 30°$ (complemento de 60°)

EAD sector circular, donde el ángulo del centro es 30°(que corresponde a $\frac{1}{12}$ del área del círculo) y radio x.

Sector circular CBE = Sector circular EAD

Determinando el área achurada (que llamaremos Área achurada 1) y multiplicándola por 4, obtendremos el área achurada pedida en el ejercicio.

Área achurada 1 = Área del cuadrado $ABCD$ – (Área $\Delta\, AEB$ - 2· Área sector circular EAD)

Reemplazando:

Área achurada 1 = $x^2 - \left(\dfrac{x^2}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \dfrac{1}{12}\pi \cdot x^2\right)$ (Simplificando y eliminando paréntesis)

Área achurada $= x^2 - \dfrac{x^2}{4}\sqrt{3} - \dfrac{1}{6}\pi x^2$

$\Rightarrow$ Área achurada = 4· Área achurada 1 (Reemplazando)

$= 4\left(x^2 - \dfrac{x^2}{4}\sqrt{3} - \dfrac{1}{6}\pi x^2\right)$ (Distribuyendo y simplificando)

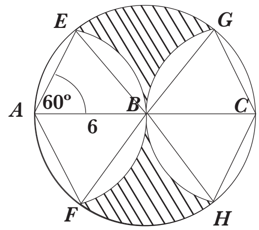
$= 4x^2 - x^2\sqrt{3} - \dfrac{2}{3}\pi x^2$ (Factorizando)

Área achurada $= x^2(4 - \sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3})$

$\therefore$ Área achurada $= x^2(4 - \sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3})$

14. La alternativa correcta es la letra B)

Considerando una parte de la figura:



Al trazar $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$, se tiene que:

$\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{AB}$ (radios) $\Rightarrow \Delta\, AEB$ equilátero de lado 6

Al trazar $\overline{AF}$ y $\overline{BF}$, se tiene que:

$\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{AB}$ (radios) $\Rightarrow \Delta\, AFB$ equilátero de lado 6

Al trazar $\overline{BG}$ y $\overline{GC}$, se tiene que:

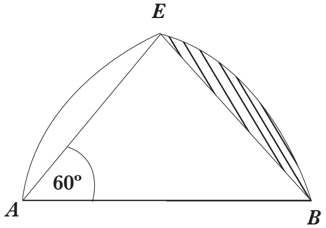
$\overline{BG} = \overline{GC} = \overline{BC}$ (radios) $\Rightarrow \Delta\, BGC$ equilátero de lado 6

Al trazar $\overline{BH}$ y $\overline{HC}$, se tiene que:

$\overline{BH} = \overline{HC} = \overline{BC}$ (radios) $\Rightarrow \Delta\, BHC$ equilátero de lado 6

BAE sector circular, donde el ángulo del centro es 60°(que corresponde a $\dfrac{1}{6}$ del área del círculo) y radio 6.

a) Considerando una parte de la figura y achurando, se tiene que:



La parte achurada se repite **8** veces en la figura original.
Determinando el área achurada (que llamaremos Área achurada **1**):

Área achurada 1 = Área sector circular BAE – Área $\Delta\, AEB$ (Reemplazando)

$$= \frac{1}{6}\pi \cdot 6^2 - \frac{6^2}{4}\sqrt{3}$$ (Resolviendo potencias y simplificando)

Área achurada $1 = 6\pi - 9\sqrt{3}$

b) Área achurada = Área del círculo – (4 · Área $\Delta\, AEB$ + 8 · Área achurada 1)

$= 36\pi - (4 \cdot 9\sqrt{3} + 8\,(6\pi - 9\sqrt{3}))$ (Resolviendo)

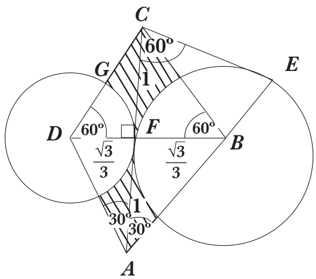
$= 36\pi - (36\sqrt{3} + 48\pi - 72\sqrt{3})$ (Eliminando paréntesis)

$= 36\pi - 36\sqrt{3} - 48\pi + 72\sqrt{3}$ (Reduciendo términos semejantes)

$= 36\sqrt{3} - 12\pi$

$\therefore$ Área achurada $= 36\sqrt{3} - 12\pi$

15. La alternativa correcta es la letra A)

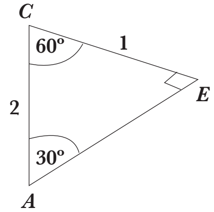


En la figura: $\overline{DC} = \overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC}$ ($ABCD$ rombo)

$\overline{AC} \perp \overline{DB}$ (Diagonales del rombo)

$\Delta\, CEA$ rectángulo en E ($\overline{CE}$ tangente a la ⊗)

Si la hipotenusa es el doble del cateto $\Rightarrow \Delta$ CEA es la mitad de un Δ equilátero $\Rightarrow$ $\overline{AE}$ altura



$\therefore \angle EAC = 30°$ y $\angle ACE = 60°$

$\overline{CF} = \overline{FA} = 1$ (Las diagonales se dimidian)

Δ DCB equilátero, ya que Δ DAB isósceles en $A \Rightarrow \overline{AF}$ bisectriz $\Rightarrow \angle BAD = 60°$

$\therefore \Delta$ DCB también es equilátero cuya altura es 1 y F punto medio

$\Rightarrow h = \dfrac{lado}{2}\sqrt{3}$ (Reemplazando)

$1 = \dfrac{lado}{2}\sqrt{3}$ (Despejando lado)

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} =$ lado (Racionalizando)

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} =$ lado $\Rightarrow$ $\overline{DF} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (Simplificando)

$\overline{DF} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

FDG sector circular, donde ángulo del centro $60°$ (que corresponde a $\dfrac{1}{6}$ del área del círculo) y radio $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ Área achurada = 2 (Área Δ DCB – 2 · $\dfrac{1}{6}$ · Área sector circular FDG)

(Reemplazando y simplificando)

$$= 2\left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)$$ (Resolviendo potencias)

$$= 2\left(\frac{4 \cdot 3}{9} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{9}\right)$$ (Simplificando)

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{9}\right)$$ (Distribuyendo)

Área achurada = $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ - $\dfrac{2}{9}\pi$

$\therefore$ Área achurada = $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ - $\dfrac{2}{9}\pi$