



Matemática 2006



Tutorial Nivel Básico

Circunferencia y círculo



Circunferencia y Círculo

Marco Teórico

1. Elementos de la circunferencia y del círculo:

O: centro de la circunferencia.

$\overline{OC}$: radio

$\overline{AB}$: cuerda

$\overline{EC}$: diámetro

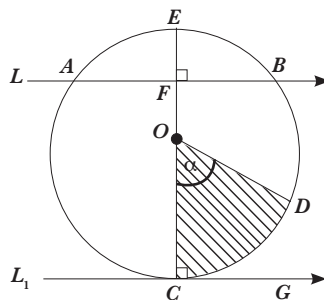
L : secante

L_1 : tangente ($\overline{OC} \perp \overline{CG}$)

$\overline{EF}$: sagita $\Rightarrow F$ punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{EO} \perp \overline{AB}$ y si $\overline{AB}$ es un lado de un polígono regular inscrito a la circunferencia $\Rightarrow \overline{FO}$ apotema.

$\overline{CD}$: arco de la circunferencia (siempre se leen en sentido contrario a los punteros del reloj). Como es una parte de la circunferencia, se puede determinar su perímetro o su medida en grados, ya que la circunferencia completa mide 360°

COD : sector circular



2. Áreas y perímetros: (considerando el dibujo anterior)

Sea r : radio, d : diámetro

2.1 Perímetro de la circunferencia: $P = 2\pi r = \pi \cdot d$

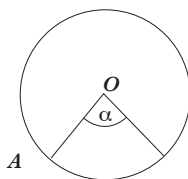
2.2 Área del círculo: $A = \pi \cdot r^2$

2.3 Área sector circular: $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$, α ángulo del centro

3. Teoremas fundamentales:

3.1 Ángulo del centro: mide lo mismo que el arco que subtiende.

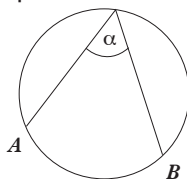
Ejemplo: Si arco $AB = 35^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$



“O”: centro de la $\odot$

3.2 Ángulo inscrito: mide la mitad del arco que subtiende.

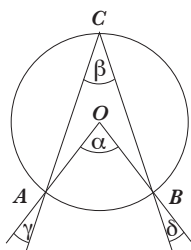
Ejemplo: Si arco $AB = 80^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ$



3.3 Ángulo inscrito y ángulo del centro correspondiente: si un ángulo inscrito y un ángulo del centro subtienden el mismo arco, el ángulo del centro mide el doble del ángulo inscrito.

$$\alpha = 2\beta$$

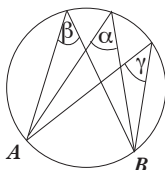
$$\beta = \gamma + \delta$$



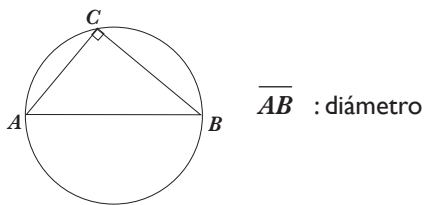
“O”: centro de la circunferencia

3.4 Igualdad de ángulos inscritos: si 2 o más ángulos inscritos comparten un mismo arco, éstos miden lo mismo.

$$\alpha = \beta = \gamma$$

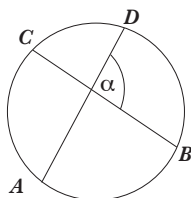


3.5 Ángulo inscrito en una semicircunferencia: todo ángulo inscrito a una circunferencia es recto.



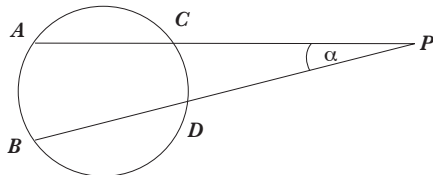
3.6 Ángulo interior:

$$\alpha = \frac{\text{arco}CA + \text{arco}BD}{2}$$

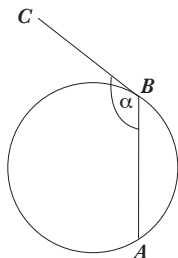


3.7 Ángulo exterior:

$$\alpha = \frac{\text{arco}AB - \text{arco}DC}{2}$$



3.8 Ángulo semi-inscrito: está formado por una cuerda y una tangente.

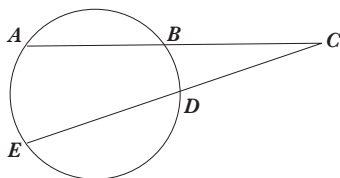


$\overline{BC}$: tangente $\overline{AB}$: cuerda

$$\alpha = \frac{\text{arco } \overline{BA}}{2}$$

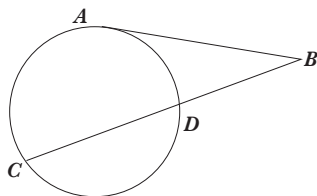
3.9 Secantes: sean $\overline{AC}$ y $\overline{EC}$ secantes

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{EC} \cdot \overline{DC}$$



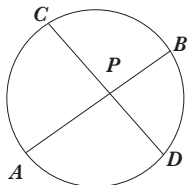
3.10 Secante y tangente: sean $\overline{AB}$ tangente y $\overline{CB}$ secante

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$



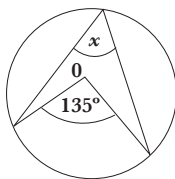
3.11 Cuerdas:

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$



Ejercicios

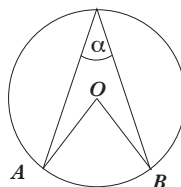
1. Sea O centro de la circunferencia, determine x :



2. Determinar el perímetro del arco AB , si $\alpha = 50^\circ$, $\overline{OA} = 4$ cm, O : centro de la circunferencia.

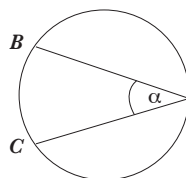
- A) $\frac{2\pi}{9}$ cm
 B) $\frac{10\pi}{9}$ cm
 C) $\frac{20\pi}{9}$ cm
 D) $\frac{40\pi}{9}$ cm

E) Ninguno de ellos



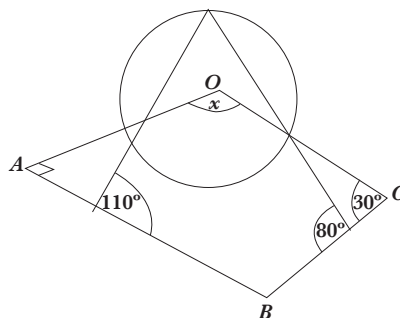
3. En la figura, el arco BC es el 30% del perímetro de la circunferencia. Determine α :

- A) 27°
 B) 54°
 C) 108°
 D) 216°
 E) Ninguno de ellos

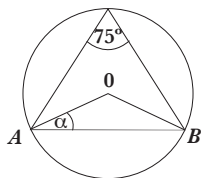


4. Sea la circunferencia de centro O , $ABCO$ cuadrilátero, determine x :

- A) 70°
 B) 80°
 C) 140°
 D) 160°
 E) Ninguno de ellos



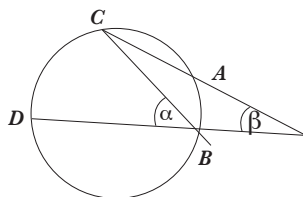
5.



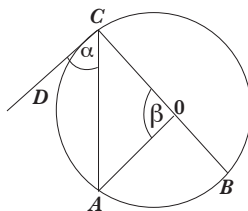
O : centro de circunferencia

$\alpha =$

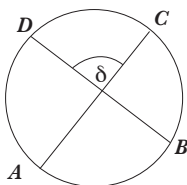
6. Determinar β si Arco $BA = 70^\circ$ y $\alpha = 95^\circ$.



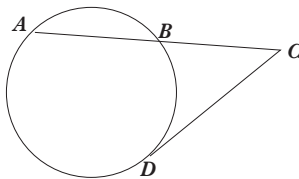
7. Sea arco $AB = 96^\circ$, $\overline{BC}$ diámetro, $\overline{DC}$ tangente. Entonces, ¿cuánto miden α y β ?



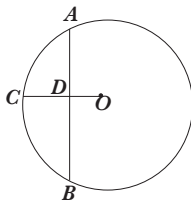
8. Determinar arco CD , si arco $AB = 80^\circ$ y $\delta = 50^\circ$



9. Sea secante $\overline{AC} = 18 \text{ cm}$, tangente $\overline{DC} = 12 \text{ cm}$, determinar $\overline{BC}$

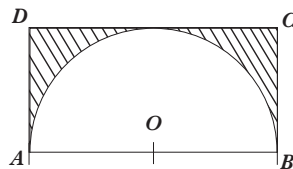


10. Sea O centro de la circunferencia, de radio 13 cm ; $\overline{OD} = 5 \text{ cm}$; $\overline{AB} \perp \overline{OC}$. Determinar $\overline{AB}$.



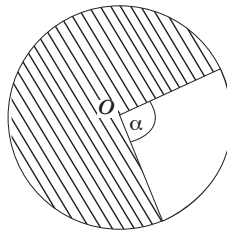
11. Sea arco BA semicircunferencia de centro O , tangente al rectángulo $ABCD$, $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$. Determine el área achurada:

- A) $(32 - 4\pi) \text{ cm}^2$
- B) $(32 - 8\pi) \text{ cm}^2$
- C) $(32 - 16\pi) \text{ cm}^2$
- D) $(64 - 16\pi) \text{ cm}^2$
- E) No se puede determinar



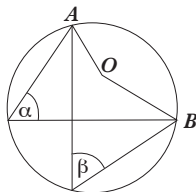
12. Sea la circunferencia de centro O y radio 6 cm , $\alpha = 60^\circ$. Determine el área achurada:

- A) $6\pi \text{ cm}^2$
- B) $10\pi \text{ cm}^2$
- C) $26\pi \text{ cm}^2$
- D) $30\pi \text{ cm}^2$
- E) $36\pi \text{ cm}^2$

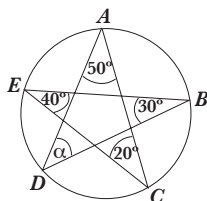


13. Sea $\alpha + \beta = 110^\circ$, O centro de la circunferencia. Determine arco AB .

- A) 55°
- B) 110°
- C) 250°
- D) 305°
- E) Otro valor

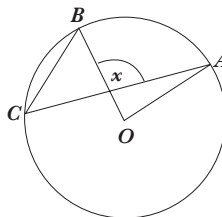


14) Determine α .



15. En la circunferencia de centro O , $\angle CBO = 70^\circ$, $\angle AOB = 80^\circ$. Determine x :

- A) 40°
- B) 70°
- C) 80°
- D) 110°
- E) 150°

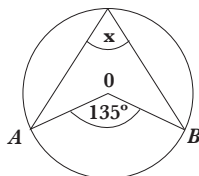


Respuestas

Preg.	Alternativa
1	67.5°
2	C
3	B
4	C
5	15°
6	60°
7	$\alpha = 42^\circ, \beta = 84^\circ$
8	20°
9	8 cm
10	24 cm
11	B
12	D
13	C
14	40°
15	D

Solucionario:

1)



Como O es centro de la circunferencia, entonces, 135° es un ángulo del centro. Además el ángulo x subtiende el mismo arco y es inscrito.

Por lo tanto, $x = 67,5^\circ$

2) La alternativa correcta es la letra C)

$$\alpha = 50^\circ \Rightarrow \angle AOB = 100^\circ$$

En este caso el ángulo del centro mide 100° , que es el que se considera en la fórmula del perímetro, $r = 4$.

$$P_{\text{arco}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ} \quad (\text{Reemplazando})$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 100}{360^\circ} \quad (\text{Simplificando})$$

$$= \frac{20\pi}{9}$$

$$\therefore P_{\text{arco AB}} = \frac{20\pi}{9} \text{ cm}$$

3) La alternativa correcta es la letra B)

Si el arco AC es el 30% del perímetro de la circunferencia, entonces:

$$\text{Arco AC} = 30\% \text{ de } 2\pi r \quad \text{o} \quad \text{Arco AC} = 30\% \text{ de } 360^\circ$$

Nos piden determinar α . Como es ángulo, utilizamos 30% de 360°

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Arco BC} &= 30\% \text{ de } 360 && (\text{Transformando el porcentaje a fracción y la palabra "de" por multiplicación}) \\ &= \frac{30}{100} \cdot 360 && (\text{Simplificando}) \end{aligned}$$

$$= 108$$

$\Rightarrow \text{Arco BC} = 108^\circ$, pero nos piden α , que es un ángulo inscrito y subtiende el arco BC. Por teorema mide la mitad.

$$\therefore \alpha = 54^\circ$$

- 4) La alternativa correcta es la letra C)

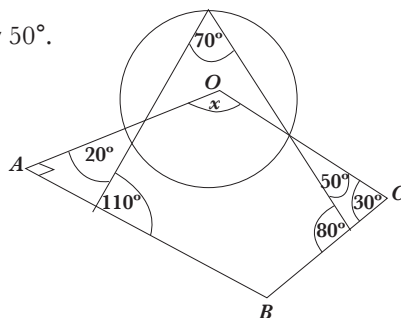
Aplicando $\angle$ exterior de Δ s, determinamos 20° y 50° .

Por teorema, determinamos 70° , como x

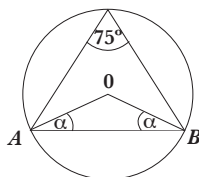
y 70° subtienden el mismo arco,

entonces $x = 140^\circ$

$$\therefore x = 140^\circ$$



- 5)



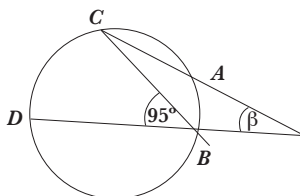
Como O es centro de la circunferencia, entonces ΔAOB isósceles en O. Además, $\angle ACB$ y $\angle AOB$ subtienden el mismo arco $\Rightarrow \angle AOB = 150^\circ$.

$$\text{Entonces, } \alpha = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} \quad (\text{Restando})$$

$$\alpha = \frac{30^\circ}{2} \quad (\text{Simplificando})$$

$$\alpha = 15^\circ$$

- 6)



Si $\alpha = 95^\circ$, entonces, arco $CD = 190^\circ$, además arco $BA = 70^\circ$.

Aplicando teorema del ángulo exterior :

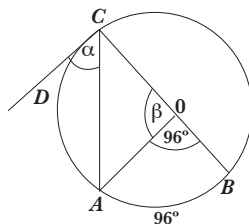
$$\beta = \frac{\text{arco } CD - \text{arco } BA}{2} \quad (\text{Reemplazando})$$

$$\beta = \frac{190^\circ - 70^\circ}{2} \quad (\text{Restando})$$

$$\beta = \frac{120^\circ}{2}$$

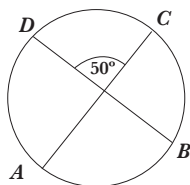
$$\beta = 60^\circ$$

7)



Si arco $AB = 96^\circ$, entonces, $\angle AOB = 96^\circ$ ya que es ángulo del centro $\Rightarrow \beta = 84^\circ$. Además, β y α subtienden el arco $CA = 84^\circ$. Por lo tanto, α mide la mitad del arco CA , ya que es ángulo semi-inscrito $\Rightarrow \alpha = 42^\circ$.

8)



Aplicando teorema del ángulo interior:

$$\delta = \frac{\text{arco } AB + \text{arco } CD}{2} \quad (\text{Reemplazando})$$

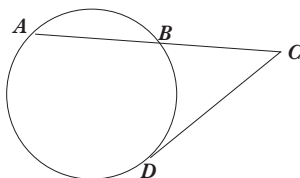
$$50^\circ = \frac{80^\circ + \text{arco } CD}{2} \quad (\text{Multiplicando por 2})$$

$$100^\circ = 80^\circ + \text{arco } CD \quad (\text{Despejando arco } CD)$$

$$100^\circ - 80^\circ = \text{arco } CD \quad (\text{Restando})$$

$$20^\circ = \text{arco } CD$$

9)


 $\overline{AC} = 18 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = 12 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = x$, aplicando teorema de la tangente y secante

$$(\overline{DC})^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC} \quad (\text{Reemplazando})$$

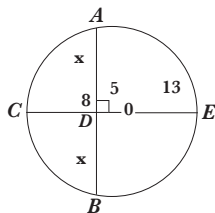
$$(12)^2 = 18 \cdot \overline{BC} \quad (\text{Desarrollando la potencia})$$

$$144 = 18 \cdot \overline{BC} \quad (\text{Despejando } \overline{BC})$$

$$\frac{144}{18} = \overline{BC} \quad (\text{Simplificando})$$

$$\overline{BC} = 8 \text{ cm}$$

- 10) $\overline{OC} = 13$ cm, $\overline{OD} = 5$ cm. Entonces, $\overline{CD} = 8$ cm, $\overline{OE} = 13$ cm. Por lo tanto, $\overline{DE} = 18$ cm.



$\overline{AB} \perp \overline{OC}$ y como $\overline{AB}$ cuerda y $\overline{OC}$ radio, entonces $\overline{CD}$ sagita, por lo tanto,
 $\overline{AD} = \overline{DB} = x$

Aplicando teorema de las cuerdas:

$$\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{CD} \cdot \overline{DE} \quad (\text{Reemplazando})$$

$$x \cdot x = 8 \cdot 18 \quad (\text{Multiplicando})$$

$$x^2 = 144 \quad (\text{Extrayendo raíz cuadrada})$$

$$x = 12$$

$$\therefore \overline{AB} = 2x = 24 \text{ cm}$$

- 11) La alternativa correcta es la letra B)

Si arco $\overline{BA}$ semicircunferencia, entonces $\overline{AB}$ diámetro y como $\overline{AB} = 8$ cm $\Rightarrow$ radio = 4 cm $\Rightarrow$
 $\overline{OE} = 4$ cm y $\overline{AD} = 4$ cm

$$\Rightarrow \text{Área } ABCD = 8 \cdot 4 = 32$$

$$\begin{aligned} \text{Área } \otimes &= \pi \cdot r^2 & (\text{Reemplazando } r) \\ &= \pi \cdot 4^2 \end{aligned}$$

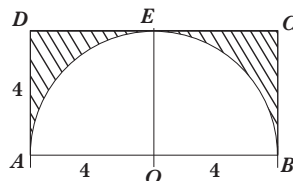
$$\text{Área } \otimes = 16\pi$$

$$\text{Área achurada} = \text{Área } ABCD - \frac{\text{Área } \otimes}{2}$$

$$= 32 - \frac{16}{2} \pi$$

$$= 32 - 8\pi$$

$$\therefore \text{Área achurada} = 32 - 8\pi \text{ cm}^2$$



12) La alternativa correcta es la letra D)

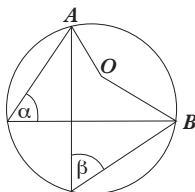
Como $\alpha = 60^\circ$ y la circunferencia completa mide $360^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360}{60} = \frac{1}{6}$ de la $\otimes$

$\Rightarrow$ Sector circular = $\frac{1}{6}$ del área del círculo, cuyo radio es 6

$\Rightarrow$ Área achurada = $\frac{5}{6}$ del área del círculo (Reemplazando)
 $= \frac{5}{6} \cdot \pi \cdot 6^2$ (Respetando el orden de la operaciones)
 $= 30\pi$

$\therefore$ Área achurada = $30\pi \text{ cm}^2$

13) La alternativa correcta es la letra C)



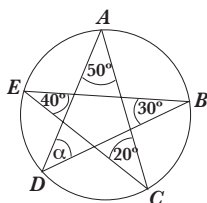
α y β ángulos inscritos que subtienden el mismo arco BA, entonces, $\alpha = \beta$, y $\alpha + \beta = 110^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 55^\circ$, por lo tanto, arco BA 110° .

Entonces, arco AB = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$.

Por lo tanto, arco AB = 250°

14)



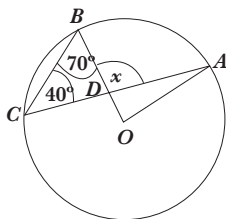
Según la figura, arco $DC = 100^\circ$, ya que $\angle DAC = 50^\circ$,
 arco $CB = 80^\circ$, ya que $\angle BEC = 40^\circ$,
 arco $AE = 40^\circ$, ya que $\angle ACE = 20^\circ$,
 arco $ED = 60^\circ$, ya que $\angle DBE = 30^\circ$, entonces,

$$\begin{aligned} \text{arco } DC + \text{arco } CB + \text{arco } BA + \text{arco } AE + \text{arco } ED &= 360^\circ && \text{(Reemplazando)} \\ 100^\circ + 80^\circ + \text{arco } BA + 40^\circ + 60^\circ &= 360^\circ && \text{(Sumando)} \\ 280^\circ + \text{arco } BA &= 360^\circ && \text{(Despejando arco } BA) \\ \text{arco } BA &= 360^\circ - 280^\circ && \text{(Restando)} \\ \text{arco } BA &= 80^\circ \end{aligned}$$

α ángulo inscrito que subtiende el arco $BA \Rightarrow \alpha = 40^\circ$

15) La alternativa correcta es la letra D)

Como $\angle AOB = 80^\circ$, entonces arco $AB = 80^\circ$ y subtiende el mismo arco que el $\angle ACB$, entonces, el $\angle$ inscrito $ACB = 40^\circ$ y como $\angle CBO = 70^\circ \Rightarrow x = 110^\circ$ ($\angle$ exterior del $\triangle CDB$).



Mis notas

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form a series of small, uniform squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Mis notas



CEPECH

ESPECIALISTAS DE LA PSU

Grupo Educacional Cepech