



Tutorial  
MT-b4

# Matemática 2006



Tutorial Nivel Básico

Ángulos y Polígonos



# Ángulos y polígonos

## Marco Teórico

1. *Sistemas de medición angular:* Utilizamos como base de medida el ángulo completo (el valor angular de una circunferencia) que en los distintos sistemas de medida toma el valor de:

| <i>Sistema Sexagesimal</i> | <i>Sistema Circular</i> | <i>Sistema Centesimal</i> |
|----------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 360 grados                 | $2\pi$ radianes         | 400 gradianes             |

Para transformar de una unidad a otra, se debe utilizar proporcionalidad directa.

## 2. Clasificación de ángulos en el sistema sexagesimal:

Agudo:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Recto:  $\alpha = 90^\circ$

Obtuso:  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Extendido:  $\alpha = 180^\circ$

Completo:  $\alpha = 360^\circ$

## 3. Relaciones angulares:

i. Ángulos complementarios: son aquellos que al sumarlos da  $90^\circ$

$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$   $\alpha$  es el complemento de  $\beta$  y  
 $\beta$  es el complemento de  $\alpha$

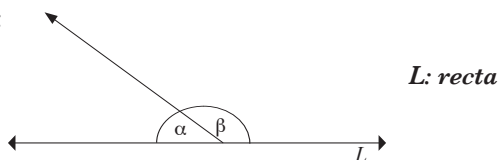
Además el complemento de  $\alpha$  es  $90^\circ - \alpha$

ii) Ángulos suplementarios: son aquellos que al sumarlos da  $180^\circ$

$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow$   $\alpha$  es el suplemento de  $\beta$  y  
 $\beta$  es el suplemento de  $\alpha$

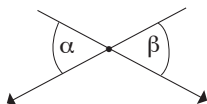
Además el suplemento de  $\alpha$  es  $180^\circ - \alpha$

iii) Ángulos adyacentes:



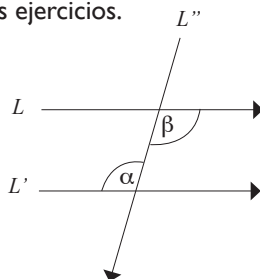
$\alpha$  y  $\beta$  son adyacentes ya que están al mismo lado de una recta  $\Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$

iv) **Ángulos opuestos por el vértice:** son aquellos formados por la intersección de 2 rectas.



$\alpha$  y  $\beta$  son opuestos por el vértice  $\Rightarrow \alpha = \beta$

4. **Ángulos entre paralelas:** son varios los tipos de ángulos que se forman, pero sólo veremos los ángulos alternos internos, ya que con ellos y con los opuestos por el vértice serán suficientes para la resolución de los ejercicios.

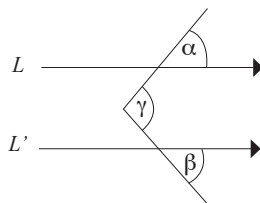


$L, L' \text{ y } L'' : \text{rectas}$

$L \parallel L'$

$\alpha$  y  $\beta$  alternos internos  $\Rightarrow \alpha = \beta$

- Sea  $L \parallel L'$ :



$\gamma = \alpha + \beta$

5. **Polígono:** es toda figura plana limitada por lados rectos. De acuerdo con el número de lados, se clasifican en:

Triángulo: 3 lados  
Cuadrilátero: 4 lados  
Pentágono: 5 lados  
Hexágono: 6 lados

Heptágono: 7 lados  
Octágono: 8 lados  
Nonágono: 9 lados  
Decágono: 10 lados

- **Clasificación de polígonos:**

- Polígono regular: es aquel que tiene todos sus lados y ángulos interiores iguales.  
Ejemplo: el cuadrado y el triángulo equilátero son polígonos regulares.
- Polígono irregular: es aquel que no cumple una o ambas condiciones del polígono regular.  
Ejemplo: el rectángulo y el rombo son polígonos irregulares.

- **Generalidades en un polígono de  $n$  lados:**

- Número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice: ( $d$ )

$$d = n - 3$$

- Número total de diagonales: ( $D$ )

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}$$

- Suma de los ángulos interiores de un polígono: ( $Si$ )

$$Si = 180^\circ (n - 2)$$

- Suma de los ángulos exteriores de un polígono: ( $Se$ )

$$Se = 360^\circ$$

## *Ejercicios*

- Transforme a grados sexagesimales:

- $3\pi$  radianes
- 80 gradianes
- $\frac{4\pi}{3}$  radianes

- Transforme a radianes:

- $180^\circ$
- $30^\circ$
- $60^\circ$

- Determine el complemento de los siguientes ángulos:

- $35^\circ$
- $52^\circ$
- $70^\circ$
- $0^\circ$
- $90^\circ$
- $\alpha$

4. Determine el suplemento de los siguientes ángulos:

- a)  $120^\circ$       b)  $93^\circ$       c)  $75^\circ$       d)  $180^\circ$       e)  $0^\circ$       f)  $\beta$

5. Determine el suplemento del suplemento del complemento del suplemento de  $120^\circ$

6. El complemento de un ángulo recto, más el suplemento de un ángulo extendido, más el complemento de  $30^\circ$  es:

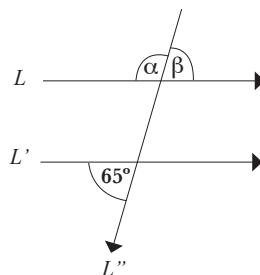
- A)  $0^\circ$   
B)  $60^\circ$   
C)  $90^\circ$   
D)  $180^\circ$   
E)  $270^\circ$

7. Si un reloj marca las 11 horas 5 minutos. ¿Qué ángulo forman sus punteros?

- A)  $30^\circ$   
B)  $45^\circ$   
C)  $55^\circ$   
D)  $57,5^\circ$   
E)  $60^\circ$

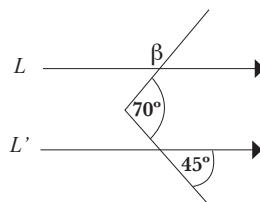
8.  $L, L', L''$ : rectas,  $L // L'$ , determine  $\alpha$  y  $\beta$

- A)  $\alpha = 55^\circ$        $\beta = 125^\circ$   
B)  $\alpha = 65^\circ$        $\beta = 115^\circ$   
C)  $\alpha = 115^\circ$        $\beta = 65^\circ$   
D)  $\alpha = 125^\circ$        $\beta = 55^\circ$   
E) Ninguno de ellos



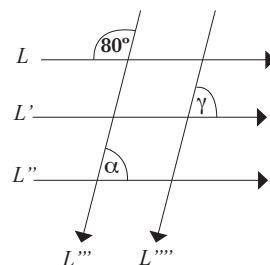
9. Si  $L // L'$ , siendo  $L$  y  $L'$  rectas. ¿Cuánto mide el ángulo  $\beta$ ?

- A)  $25^\circ$   
B)  $45^\circ$   
C)  $65^\circ$   
D)  $115^\circ$   
E)  $155^\circ$



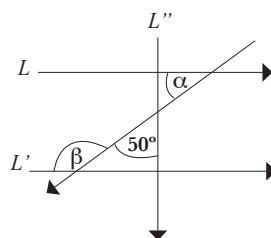
10.  $L // L' // L''$  y  $L''' // L''''$ . Determine  $\alpha$  y  $\gamma$

- A)  $\alpha = 10^\circ$      $\gamma = 10^\circ$   
 B)  $\alpha = 80^\circ$      $\gamma = 80^\circ$   
 C)  $\alpha = 80^\circ$      $\gamma = 100^\circ$   
 D)  $\alpha = 100^\circ$      $\gamma = 80^\circ$   
 E)  $\alpha = 100^\circ$      $\gamma = 100^\circ$



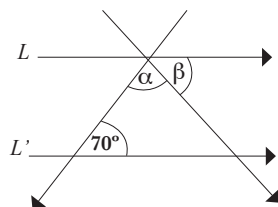
11.  $L // L'$  y  $L \perp L''$ . ¿Cuánto miden  $\alpha$  y  $\beta$ ?

- A)  $\alpha = 40^\circ$      $\beta = 50^\circ$   
 B)  $\alpha = 40^\circ$      $\beta = 140^\circ$   
 C)  $\alpha = 50^\circ$      $\beta = 130^\circ$   
 D)  $\alpha = 130^\circ$      $\beta = 50^\circ$   
 E)  $\alpha = 140^\circ$      $\beta = 40^\circ$



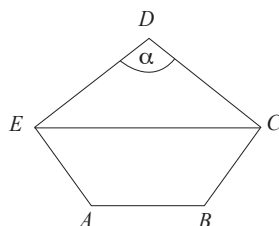
12.  $L // L'$  y  $\alpha : \beta = 2 : 3$ . ¿Cuánto mide  $\alpha$ ?

- A)  $28^\circ$   
 B)  $42^\circ$   
 C)  $44^\circ$   
 D)  $66^\circ$   
 E)  $70^\circ$



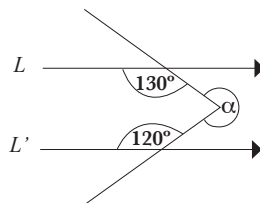
13. Determine de un heptágono:  $S_i$ ,  $S_e$ ,  $d$ ,  $D$ .

14. Determine el valor de  $\alpha$  en el pentágono regular



15. Si  $L // L'$ . ¿Cuánto mide  $\alpha$ ?

- A)  $110^\circ$
- B)  $115^\circ$
- C)  $250^\circ$
- D)  $260^\circ$
- E) Otro valor



## Respuestas

| Preg. | Alternativa                                                                                      |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | a) $540^\circ$ b) $72^\circ$ c) $240^\circ$                                                      |
| 2     | a) $\pi$ radianes<br>b) $\frac{\pi}{6}$ radianes<br>c) $\frac{\pi}{3}$ radianes                  |
| 3     | a) $55^\circ$ b) $38^\circ$ c) $20^\circ$<br>d) $90^\circ$ e) $0^\circ$ f) $90^\circ - \alpha$   |
| 4     | a) $60^\circ$ b) $87^\circ$ c) $105^\circ$<br>d) $0^\circ$ e) $180^\circ$ f) $180^\circ - \beta$ |
| 5     | $30^\circ$                                                                                       |
| 6     | B                                                                                                |
| 7     | D                                                                                                |
| 8     | C                                                                                                |
| 9     | E                                                                                                |
| 10    | E                                                                                                |
| 11    | B                                                                                                |
| 12    | C                                                                                                |
| 13    | $Si = 900^\circ$ , $Se = 360^\circ$ , $d = 4$ , $D = 14$                                         |
| 14    | $\alpha = 108^\circ$                                                                             |
| 15    | C                                                                                                |

**Solucionario**

- I. a)
- $3\pi$
- radianes a sexagesimales

Aplicando proporcionalidad directa:

Sexagesimales

Radianes

(Multiplicamos cruzado)

$$\begin{array}{ccc} 360 & \nearrow & 2\pi \\ x & \searrow & 3\pi \end{array}$$

$$2\pi \cdot x = 360 \cdot 3\pi$$

(Despejando  $x$ )

$$x = \frac{360 \cdot 3\pi}{2\pi}$$

(Simplificando)

$$x = 540^\circ$$

- b) 80 gradianes a sexagesimales

Aplicando proporcionalidad directa:

Sexagesimales

Gradianes

(Multiplicamos cruzado)

$$\begin{array}{ccc} 360 & \nearrow & 400 \\ x & \searrow & 80 \end{array}$$

$$400 \cdot x = 360 \cdot 80$$

(Despejando  $x$ )

$$x = \frac{360 \cdot 80}{400}$$

(Simplificando)

$$x = 72^\circ$$

- c)
- $\frac{4\pi}{3}$
- radianes a sexagesimales

Aplicando proporcionalidad directa:

Sexagesimales

Radianes

(Multiplicamos cruzado)

$$\begin{array}{ccc} 360 & \nearrow & 2\pi \\ x & \searrow & \frac{4\pi}{3} \end{array}$$

$$2\pi \cdot x = 360 \cdot \frac{4\pi}{3}$$

(Despejando  $x$ )

$$x = 360 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

(Simplificando)

$$x = 240^\circ$$



2. a)  $180^\circ$  a radianes

Aplicando proporcionalidad directa:

Sexagesimales                  Radianes

(Multiplicamos cruzado)

$$\begin{array}{ccc} 360 & \nearrow & 2\pi \\ 180 & \searrow & x \end{array}$$

$$360 \cdot x = 180 \cdot 2\pi$$

(Despejando  $x$ )

$$x = \frac{180 \cdot 2\pi}{360}$$

(Simplificando)

$$x = \pi \text{ radianes}$$

b)  $30^\circ$  a radianes

Aplicando proporcionalidad directa:

Sexagesimales                  Radianes

(Multiplicamos cruzado)

$$\begin{array}{ccc} 360 & \nearrow & 2\pi \\ 30 & \searrow & x \end{array}$$

$$360 \cdot x = 30 \cdot 2\pi$$

(Despejando  $x$ )

$$x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360}$$

(Simplificando)

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$

c)  $60^\circ$  a radianes

Aplicando proporcionalidad directa:

Sexagesimales                  Radianes

(Multiplicamos cruzado)

$$\begin{array}{ccc} 360 & \nearrow & 2\pi \\ 60 & \searrow & x \end{array}$$

$$360 \cdot x = 60 \cdot 2\pi$$

(Despejando  $x$ )

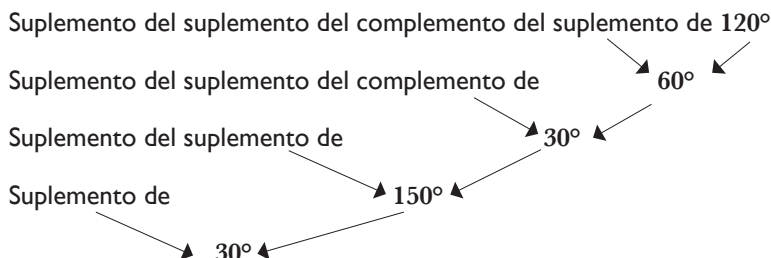
$$x = \frac{60 \cdot 2\pi}{360}$$

(Simplificando)

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

3. a) Complemento de  $35^\circ = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$   
 $\therefore$  Complemento de  $35^\circ = 55^\circ$
- b) Complemento de  $52^\circ = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$   
 $\therefore$  Complemento de  $52^\circ = 38^\circ$
- c) Complemento de  $70^\circ = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$   
 $\therefore$  Complemento de  $70^\circ = 20^\circ$
- d) Complemento de  $0^\circ = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$   
 $\therefore$  Complemento de  $0^\circ = 90^\circ$
- e) Complemento de  $90^\circ = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$   
 $\therefore$  Complemento de  $90^\circ = 0^\circ$
- f) Complemento de  $\alpha = 90^\circ - \alpha$
4. a) Suplemento de  $120^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$   
 $\therefore$  Suplemento de  $120^\circ = 60^\circ$
- b) Suplemento de  $93^\circ = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ$   
 $\therefore$  Suplemento de  $93^\circ = 87^\circ$
- c) Suplemento de  $75^\circ = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$   
 $\therefore$  Suplemento de  $75^\circ = 105^\circ$
- d) Suplemento de  $180^\circ = 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$   
 $\therefore$  Suplemento de  $180^\circ = 0^\circ$
- e) Suplemento de  $0^\circ = 180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$   
 $\therefore$  Suplemento de  $0^\circ = 180^\circ$
- f) Suplemento de  $\beta = 180^\circ - \beta$

5. Este ejercicio se resuelve de derecha a izquierda.



6. La alternativa correcta es la letra B)

Recordemos que el ángulo recto mide  $90^\circ$  y el ángulo extendido mide  $180^\circ$ .

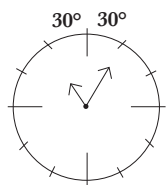
Complemento de un ángulo recto =  $90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$

Suplemento de un ángulo extendido =  $180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$

Complemento de  $30^\circ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$\therefore 0^\circ + 0^\circ + 60^\circ = 60^\circ$$

7. La alternativa correcta es la letra D)



La circunferencia tiene 12 divisiones iguales, además la circunferencia mide  $360^\circ \Rightarrow 360 \div 12 = 30^\circ$

Si el horario estuviese frente al 11 y a la 1, se formaría un ángulo de  $60^\circ$ , pero como han transcurrido 5 minutos, el horario ya no está frente al 11, ya que a medida que avanza el minutero, el horario también avanza.

Por lo tanto, debemos calcular cuántos grados se ha desplazado el horario cuando han transcurrido 5 minutos.

Para eso utilizaremos proporcionalidad directa. (Sabemos que cuando ha transcurrido 1 hora, el horario se ha desplazado  $30^\circ$ )

Minutos

Grados

(Multiplicamos cruzado)

$$\begin{array}{ccc} 60 & \searrow & 30 \\ 5 & \nearrow & x \end{array}$$

$$60 \cdot x = 30 \cdot 5$$

(Despejando  $x$ )

$$x = \frac{5 \cdot 30}{60}$$

(Simplificando)

$$x = \frac{5}{2}$$

$$x = 2,5^\circ$$

Entonces, si el horario estuviese frente al 11, se formaría un ángulo de  $60^\circ$ , pero tenemos que restarle los  $2,5^\circ$  que se ha desplazado.

$$\Rightarrow 60^\circ - 2,5^\circ = 57,5^\circ$$

$\therefore$  El ángulo que forman los punteros del reloj cuando son las 11 horas 5 minutos es  $57,5^\circ$

8. La alternativa correcta es la letra C)

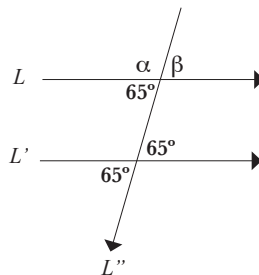
Si trasladamos  $65^\circ$  a su opuesto por el vértice y luego a su alterno interno, nos damos cuenta que:

$$\beta = 65^\circ \text{ (opuestos por el vértice)}$$

$\alpha$  es el suplemento de  $65^\circ$

$$\Rightarrow \text{Suplemento de } 65^\circ = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

$$\therefore \alpha = 115^\circ \text{ y } \beta = 65^\circ$$



9. La alternativa correcta es la letra E)

Como  $L \parallel L'$

$$\Rightarrow x + 45^\circ = 70^\circ$$

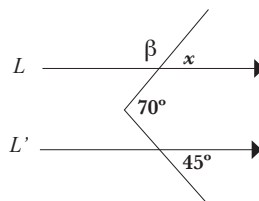
$$x = 70^\circ - 45^\circ$$

$$x = 25^\circ$$

Pero  $\beta$  es el suplemento de  $x$

$$\Rightarrow \beta = 180^\circ - 25^\circ$$

$$\therefore \beta = 155^\circ$$



10. La alternativa correcta es la letra E)

Como  $L // L''$ , entonces trasladamos  $\alpha$  a su alterno interno, entonces  $\alpha$  es el suplemento de  $80^\circ$

$$\Rightarrow \alpha = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

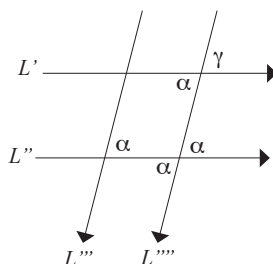
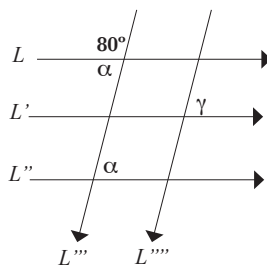
$$\therefore \alpha = 100^\circ$$

Como  $L''' // L''''$ , entonces trasladamos  $\alpha$  a su alterno interno y a su opuesto por el vértice, y además como  $L' // L''$  trasladamos  $\alpha$  a su alterno interno y resulta que  $\alpha$  y  $\gamma$  son opuestos por el vértice

$$\Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = 100^\circ$$

$$\therefore \alpha = \gamma = 100^\circ$$



11. La alternativa correcta es la letra B)

Como  $L'' \perp L$ , se forma un ángulo recto, además  $L // L' \Rightarrow L' \perp L''$

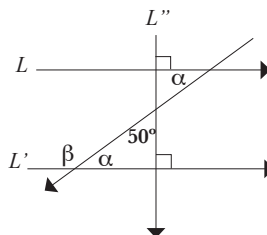
Trasladamos  $\alpha$  a su alterno interno y por suma de los ángulos interiores de un triángulo  $\alpha = 40^\circ$

Además  $\beta$  es el suplemento de  $\alpha$

$$\Rightarrow \beta = 180^\circ - 40^\circ$$

$$\beta = 140^\circ$$

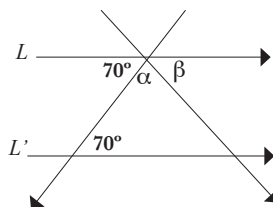
$$\therefore \alpha = 40^\circ \text{ y } \beta = 140^\circ$$



12. La alternativa correcta es la letra C)

Como  $L // L'$ , entonces trasladamos  $70^\circ$  a su alterno interno  $\Rightarrow 70^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ$  (ángulo extendido)

$$\therefore \alpha + \beta = 110^\circ$$



Por otro lado, sabemos que  $\alpha : \beta = 2 : 3$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 110^\circ$$

$$\alpha : \beta = 2 : 3 \quad (\text{Escribiendo la otra notación})$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = k \quad (\text{Separando en razones})$$

$$\frac{\alpha}{2} = k \Rightarrow \alpha = 2k \quad (\text{Despejando } \alpha)$$

$$\frac{\beta}{3} = k \Rightarrow \beta = 3k \quad (\text{Despejando } \beta)$$

$$\text{Como } \alpha + \beta = 110^\circ \quad (\text{Reemplazamos})$$

$$2k + 3k = 110^\circ$$

$$5k = 110^\circ \quad (\text{Despejando } k)$$

$$k = \frac{110}{5} \quad (\text{Simplificando})$$

$$k = 22$$

$$\text{Sabemos que } \alpha = 2k \text{ y } k = 22$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 22$$

$$\therefore \alpha = 44^\circ$$

13. Heptágono : 7 lados  $\Rightarrow n = 7$

$$Si = 180^\circ (n - 2) \quad (\text{Reemplazando } n)$$

$$Si = 180^\circ (7 - 2) \quad (\text{Resolviendo paréntesis})$$

$$Si = 180^\circ \cdot 5 \quad (\text{Multiplicando})$$

$$Si = 900^\circ$$

$$Se = 360^\circ$$

$$d = n - 3 \quad (\text{Reemplazando } n)$$

$$d = 7 - 3$$

$$d = 4$$

$$D = \frac{n(n - 3)}{2} \quad (\text{Reemplazando } n)$$

$$D = \frac{7(7-3)}{2} \quad (\text{Resolviendo paréntesis})$$

$$D = \frac{7 \cdot 4}{2} \quad (\text{Simplificando})$$

$$D = 14$$

14. Como la figura es un pentágono regular

$\Rightarrow$  todos sus lados y sus ángulos son iguales.

Calculamos  $Si$

$$n = 5$$

$$Si = 180^\circ(n - 2) \quad (\text{Reemplazando } n)$$

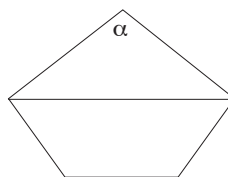
$$Si = 180^\circ(5 - 2) \quad (\text{Resolviendo paréntesis})$$

$$Si = 180^\circ \cdot 3 \quad (\text{Multiplicando})$$

$$Si = 540^\circ$$

$$\text{Entonces, cada ángulo mide } \frac{540}{5} = 108^\circ$$

$$\therefore \alpha = 108^\circ$$



15. La alternativa correcta es la letra C)

Como  $L // L' \Rightarrow z = x + y$

Sabemos que  $x$  es suplemento de  $130^\circ$

$$\Rightarrow x = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Sabemos que  $y$  es suplemento de  $120^\circ$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore y = 60^\circ$$

Como  $z = x + y$  (Reemplazando)

$$z = 50^\circ + 60^\circ$$

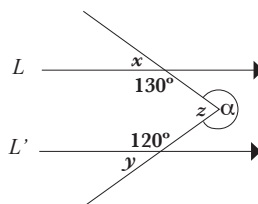
$$z = 110^\circ$$

Además,  $z + \alpha = 360^\circ$  (Angulo completo)

$$110^\circ + \alpha = 360^\circ \quad (\text{Reemplazando } z)$$

$$\alpha = 360^\circ - 110^\circ$$

$$\therefore \alpha = 250^\circ$$



# CEPECH

ESPECIALISTAS DE LA PSU

Grupo Educacional Cepech