



Tutorial
MT-b9

Matemática 2006



Tutorial Nivel Básico

Trigonometría en triángulo rectángulo



Trigonometría en triángulo rectángulo

1. Un poco de historia: Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre Júpiter y Marte, o una distancia que no podía ser medida de una forma directa.

Su origen se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia, y se usaban para efectuar medidas agrícolas y además en la construcción de las pirámides. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a estudiarse como una rama de las matemáticas.

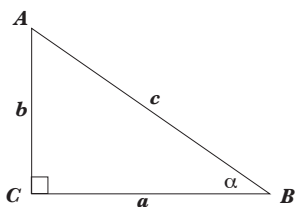
1.1 Definición: de un modo resumido podemos decir que la trigonometría es la parte de las matemáticas elementales puras, que trata de la resolución analítica de los triángulos, relacionando sus ángulos y lados.

El triángulo ABC es rectángulo en C y lo utilizaremos para definir las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

1.2 Seno α es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

1.3 Coseno α es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

1.4 Tangente α es la razón entre el cateto opuesto y el adyacente, además equivale a la razón entre seno α y coseno α .

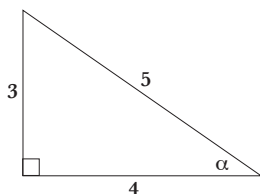


$$\text{Sen } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{b}{a}$$

Ejemplo:



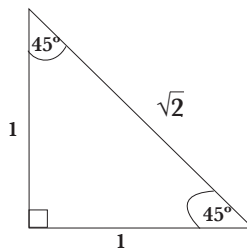
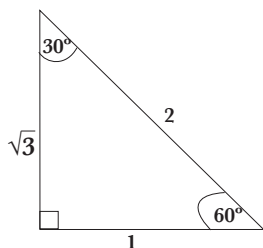
$$\text{Sen } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

2. Triángulos trigonométricos:

Dos triángulos muy utilizados en trigonometría son el triángulo rectángulo de ángulos 30° , 60° y 90° (medio triángulo equilátero) y el triángulo rectángulo isósceles, estos triángulos son utilizados principalmente para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos 30° y 60° en el primer caso y del ángulo de 45° en el segundo caso.



De donde se desprende que:

$$\text{Sen } 30^\circ = \text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ racionalizando: } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{Sen } 45^\circ = \text{Cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{, racionalizando: } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = 1$$

3. Secante, Cosecante y Cotangente:

Otras funciones trigonométricas utilizadas son:

3.1 Secante α es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

3.2 Cosecante α es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

3.3 Cotangente α es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto, además equivale a la razón entre coseno α y seno α .

O sea:

$$\text{Secante } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}} = \frac{1}{\text{coseno } \alpha}$$

$$\text{Cosecante } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto}} = \frac{1}{\text{seno } \alpha}$$

$$\text{Cotangente } \alpha = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat. opuesto}} = \frac{\text{coseno } \alpha}{\text{seno } \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

Ejercicios:

1. α corresponde a un ángulo interno agudo de un triángulo rectángulo, si $\text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$, $\text{cos } \alpha =$
 - A) 12
 - B) $\frac{12}{13}$
 - C) $\frac{13}{12}$
 - D) $\frac{13}{5}$
 - E) 5
2. α corresponde a un ángulo interno agudo de un triángulo rectángulo, si $\text{cos } \alpha = \frac{9}{15}$, $\text{sen } \alpha + \text{tg } \alpha =$
 - A) $\frac{32}{15}$
 - B) $\frac{12}{9}$
 - C) 15
 - D) 12
 - E) $\frac{9}{12}$

3. α y β corresponden a los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo, si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10}$, $\operatorname{sen} \beta =$

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{8}{6}$

C) $\frac{10}{8}$

D) 8

E) $\frac{6}{10}$

4. $\operatorname{sen} 45^\circ - \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ =$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

E) 1

5. $\cotg 45^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ =$

A) 1

B) 3

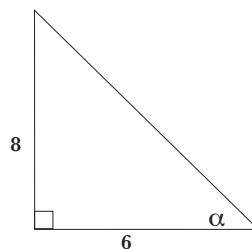
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

E) No se puede calcular

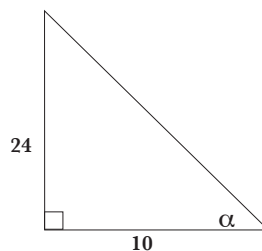
6. ¿Cuánto mide el $\text{sen } \alpha$, del siguiente triángulo?

- A) 5
- B) 10
- C) $\frac{6}{10}$
- D) $\frac{4}{5}$
- E) Otro valor



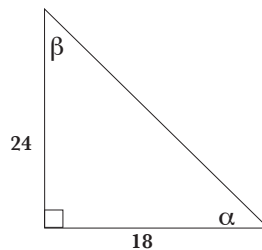
7. ¿Cuánto mide $\text{sen } \alpha + \cos \alpha$, en el siguiente triángulo:

- A) $\frac{12}{13}$
- B) $\frac{5}{13}$
- C) $\frac{17}{13}$
- D) $\frac{26}{10}$
- E) $\frac{25}{26}$



8. ¿Cuánto mide la expresión $\text{sen } \alpha \cdot \cos \beta \cdot \frac{25}{16}$, en el siguiente triángulo:

- A) $\frac{24}{30}$
- B) $\frac{16}{25}$
- C) 1
- D) 30
- E) $\frac{25}{16}$



9. Se tiene un triángulo rectángulo de catetos 15 y 20, el seno y coseno del ángulo agudo mayor corresponden a:

A) $\text{sen} = \frac{3}{5}$ $\cos = \frac{4}{5}$

B) $\text{sen} = \frac{4}{5}$ $\cos = \frac{3}{5}$

C) $\text{sen} = \frac{15}{4}$ $\cos = \frac{5}{12}$

D) $\text{sen} = \frac{3}{4}$ $\cos = \frac{4}{3}$

E) $\text{sen} = \frac{4}{5}$ $\cos = \frac{3}{4}$

10. Señale cuál es la alternativa FALSA.

A) Si uno de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 45° y uno de sus catetos mide 2 cm es posible conocer el valor de la tangente de 45° .

B) La cosecante α equivale a $\frac{1}{\text{sen } \alpha}$.

C) La tangente de 45° equivale a la cotangente de 45° .

D) Si el seno de un triángulo rectángulo es $\frac{30}{50}$ el coseno es $\frac{40}{50}$.

E) Conocidos los tres ángulos interiores de un triángulo es posible resolver el triángulo.

11. Un avión despegue del aeropuerto con un ángulo de elevación de 30° según se muestra en la figura. ¿A qué distancia (d) se encuentra el avión desde el punto de despegue hasta que alcanza una altura de 3 kilómetros?

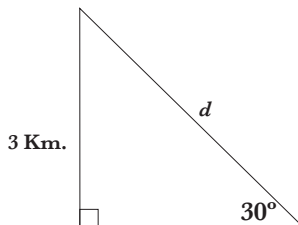
A) 1500 metros

B) 3000 metros

C) 6000 metros

D) $1500\sqrt{3}$ metros

E) $3000\sqrt{3}$ metros



12. Al mirar la cumbre del cerro San Cristóbal desde un punto en plaza Baquedano se observa que el ángulo de elevación es de 30° . Al acercarse horizontalmente $\frac{580\sqrt{3}}{3}$ metros, el ángulo es ahora 60° . ¿Cuál es la altura del cerro San Cristóbal?

- A) 290 metros
- B) 580 metros
- C) 1160 metros
- D) $1160\sqrt{3}$ metros
- E) $580\sqrt{3}$ metros

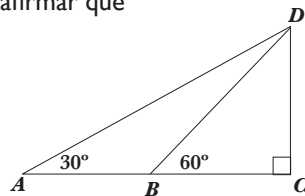
13. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) igual(es) a: $\operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$?

- I) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
- II) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- III) $\operatorname{tg} 45$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo II y III
- E) Sólo I y III

14. Desde un punto A en el piso se forma un ángulo de elevación de 30° con la parte más alta de un edificio, desde otro punto B también en el piso y más cercano al edificio, se forma un ángulo de elevación de 60° con la parte más alta del edificio, como indica la figura. Si la distancia entre el punto A y B es de 30 metros, es posible afirmar que

- A) el triángulo ABD es escaleno.
- B) la altura del edificio es $30\sqrt{3}$ metros.
- C) la distancia entre A y C es 15 metros.
- D) la distancia entre A y C es 45 metros.
- E) la distancia entre B y D es 15 metros.



15. En la figura, ¿cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) verdadera(s) ?

I. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$

II. $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = \frac{7}{5}$

III. $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \frac{-7}{12}$

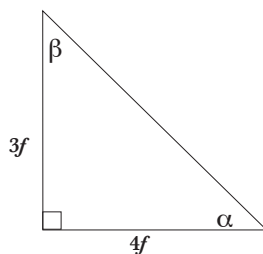
A) Sólo I

B) Sólo II

C) Sólo I y II

D) Sólo I y III

E) I, II y III



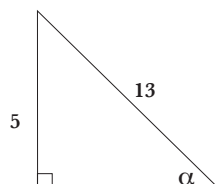
Respuestas

Preg.	Alternativa
1	B
2	A
3	A
4	D
5	B
6	D
7	C
8	C
9	B
10	E
11	C
12	A
13	E
14	D
15	B

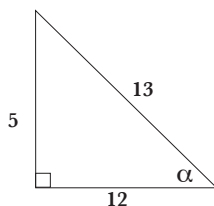
Solucionario:

1. Alternativa correcta letra B)

Utilizando la definición del seno, uno de los muchos triángulos rectángulos que satisfacen la igualdad $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13}$ es:



Utilizando Pitágoras, tenemos que:

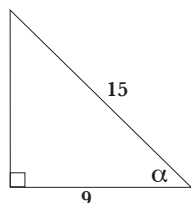


Finalmente utilizando la definición de coseno, resulta

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

2. Alternativa correcta letra A)

Utilizando la definición del coseno, uno de los muchos triángulos rectángulos que satisfacen la igualdad $\cos \alpha = \frac{9}{15}$ es:



Utilizando Pitágoras, tenemos que el valor del otro cateto es 12

Luego, utilizando la definición de seno y tangente, resulta

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{15} \quad (\text{Simplificando por 3})$$

$$= \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{9} \quad (\text{Simplificando por 3})$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\text{Luego } \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \quad (\text{Sumando fracciones})$$

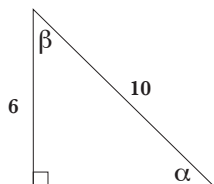
$$\frac{12 + 20}{15} = \quad (\text{Sumando el numerador})$$

$$\frac{32}{15}$$

3. Alternativa correcta letra A)

α y β corresponden a los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo, si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10}$, $\operatorname{sen} \beta =$

Utilizando la definición del seno, uno de los muchos triángulos rectángulos que satisfacen la igualdad $\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10}$ es:



Utilizando Pitágoras, tenemos que el valor del otro cateto es 8

finalmente utilizando la definición de seno tenemos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \beta &= \frac{8}{10} && (\text{Simplificando por } 2) \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

4. Alternativa correcta letra D)

En este caso utilizamos los valores dados en el marco teórico de esta tutoría, en donde

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ luego sumando}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5. Alternativa correcta letra B)

Utilizando la definición en donde cotangente $\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ y dado que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, tenemos que:

$$\operatorname{Cotangente} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

Utilizando la definición en donde cosecante $\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ y dado que $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\operatorname{Cosecante} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned}\text{Luego, } \operatorname{cotg} 45^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ &= \\ 1 + 2 &= 3\end{aligned}$$

6. Alternativa correcta letra D)

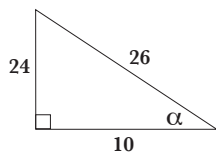
Primero aplicamos teorema de Pitágoras, con lo cual descubrimos que el valor de la hipotenusa corresponde a 10.

$$\text{Luego aplicando la definición de seno, resulta } \operatorname{sen} \alpha = \frac{8}{10} \qquad (\text{Simplificando por } 2)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$$

7. Alternativa correcta letra C)

Utilizando Pitágoras, tenemos que:



utilizando la definición de seno y coseno, tenemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{24}{26} \quad (\text{Simplificando por 2})$$

$$= \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{10}{26} \quad (\text{Simplificando por 2})$$

$$= \frac{5}{13}$$

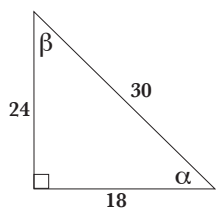
finalmente $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha =$

$$\frac{12}{13} + \frac{5}{13} = \quad (\text{Sumando fracciones})$$

$$\frac{12 + 5}{13} = \frac{17}{13}$$

8. Alternativa correcta letra C)

Utilizando Pitágoras, tenemos que:



utilizando la definición de seno y coseno ,tenemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{24}{30} \quad (\text{Simplificando por 6})$$

$$= \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{24}{30}$$

(Simplificando por 6)

$$= \frac{4}{5}$$

$$\text{entonces, } \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{25}{16}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{16} =$$

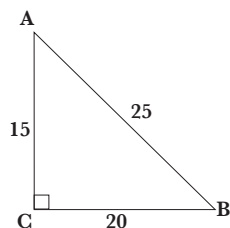
(Simplificando)

$$1$$

9. Alternativa correcta letra B)

Primero aplicamos teorema de Pitágoras, con lo cual descubrimos que el valor de la hipotenusa corresponde a 25.

Gráficamente tenemos:



Además aplicando la máxima “a mayor lado se opone mayor ángulo”, debemos calcular seno y coseno del ángulo CAB , luego aplicando la definición de seno y coseno, resulta

$$\text{Seno } CAB = \frac{20}{25}$$

(Simplificando por 5)

$$\text{Seno } CAB = \frac{4}{5}$$

$$\text{Coseno } CAB = \frac{15}{25}$$

(Simplificando por 5)

$$\text{Coseno } CAB = \frac{3}{5}$$

10. Alternativa correcta letra E)

Con sólo conocer los ángulos interiores de un triángulo **no** es suficiente para conocer sus lados, ya que existen infinitos triángulos semejantes a uno dado con idénticos ángulos.

11. Alternativa correcta letra C)

Utilizando la definición de seno

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{3}{d} \quad (\text{Despejando } d)$$

$$d = \frac{3}{\text{sen} 30^\circ} \quad (\text{Aplicando que } \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2})$$

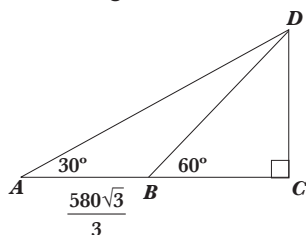
$$d = \frac{3}{\frac{1}{2}} \quad (\text{Dividiendo})$$

$$d = 6 \text{ km} \quad \text{o} \quad d = 6.000 \text{ m}$$

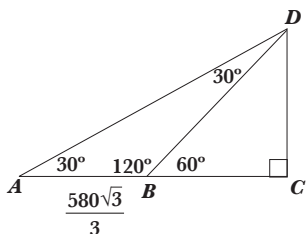
12. Alternativa correcta letra A)

Al mirar la cumbre del cerro San Cristóbal desde un punto en plaza Baquedano se observa que el ángulo de elevación es de 30° . Al acercarse horizontalmente $\frac{580\sqrt{3}}{3}$ metros, el ángulo es ahora 60° . ¿Cuál es la altura del cerro San Cristóbal?

En forma gráfica, resulta



Completando los ángulos internos tenemos que:



Con lo cual $\overline{AB} = \overline{BD}$

$$\text{Luego } \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\text{altura}}{\frac{580\sqrt{3}}{3}}$$

(Despejando altura)

$$\operatorname{sen} 60^\circ \cdot \frac{580\sqrt{3}}{3} = \text{altura}$$

(Reemplazando $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{580\sqrt{3}}{3} = \text{altura}$$

(Multiplicando las raíces)

$$\frac{580 \cdot 3}{2 \cdot 3} \text{ altura}$$

(Multiplicando y dividiendo)

$$\text{altura} = 290$$

13. Alternativa correcta letra E)

I) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

II) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

III) $\operatorname{tg} 45^\circ$

$$\text{Si, } \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

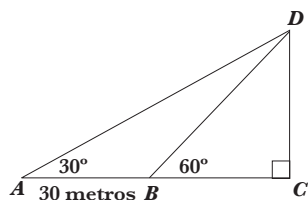
Entonces $\operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1$ (Simplificando)

luego como $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ I es verdadera

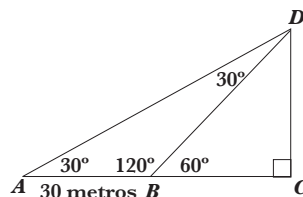
$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ III es verdadera

14. Alternativa correcta letra D)

Desde un punto A en el piso se forma un ángulo de elevación de 30° con la parte más alta de un edificio, desde otro punto B también en el piso y más cercano al edificio, se forma un ángulo de elevación de 60° con la parte más alta del edificio, como indica la figura. Si la distancia entre el punto A y B es de 30 metros es posible afirmar que:



Completando los ángulos internos tenemos que:



Con lo cual $\overline{AB} = \overline{BD}$

Luego $\cos 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$

$\cos 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{30}$ (Despejando)

$$\overline{BC} = \cos 60^\circ \cdot 30 \quad \text{aplicando } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

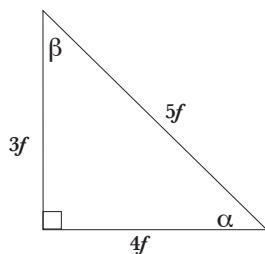
$$\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$$

$$\text{Luego } \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \quad (\text{Reemplazando})$$

$$\overline{AC} = 30 + 15 = 45 \text{ metros}$$

15. Alternativa correcta letra B)

Utilizando Pitágoras, tenemos que:



Luego utilizando definición de tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3f}{4f} \quad \text{simplificando por } f, \text{ resulta } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{con lo cual I es falsa.}$$

Utilizando definición de seno:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}, \text{ con lo cual II es verdadera.}$$

Utilizando definición de tangente:

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \quad (\text{Restando las fracciones})$$

$$\frac{16 - 9}{12} = \frac{7}{12} \quad , \text{ con lo cual III es falsa}$$

Mis notas



CEPECH

ESPECIALISTAS DE LA PSU

Grupo Educacional Cepech