



Matemática 2006



Tutorial Nivel Básico

Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones



Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Marco Teórico

1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita:

Son aquellas en que el mayor exponente de la incógnita es 1 y por lo tanto tiene 1 solución.

1.1 Ecuaciones lineales:

Como ejemplo de ellas, resolveremos los siguientes ejercicios.

Determine el valor de x :

a) $bx + a = ax + b$	(Dejamos la incógnita a un solo lado)
$bx - ax = b - a$	(Factorizando por x)
$x(b - a) = b - a$	(Despejando x)
$x = \frac{b - a}{b - a}$	(Simplificando)
$x = 1$	

b) $10x + 7 - 6x + 9 = 4x + 16$	(Reduciendo términos semejantes)
$4x + 16 = 4x + 16$	(Dejamos la incógnita a un solo lado)
$4x - 4x = 16 - 16$	
$0 = 0$	

Este es un caso especial, en que la incógnita se anula.

Debemos analizar el resultado:

- i) si es una igualdad, existen infinitas soluciones
- ii) si no es una igualdad, **no** existe solución

En esta ecuación llegamos a una igualdad

∴ Tiene infinitas soluciones.

1.2 Ecuaciones fraccionarias: son aquellas que tienen fracciones.

Un método muy útil para resolverlas es eliminando los denominadores y dejarla lineal.

Como ejemplo de ellas, resolveremos el siguiente ejercicio.

Determine el valor de x :

$$a) \frac{3}{5}x + \frac{3}{15} = \frac{3}{10}x - 2$$

(Simplificando las fracciones)

$$\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}x - 2 \quad / \cdot 10$$

(Hay que determinar el mínimo común múltiplo entre los denominadores, que es 10 y multiplicarlo por cada término de la ecuación)

$$\frac{3}{5}x \cdot 10 + \frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{3}{10}x \cdot 10 - 2 \cdot 10$$

(Simplificando y multiplicando)

(Recordar el orden de las operaciones)

$$3x \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 3x - 20$$

$$6x + 2 = 3x - 20$$

(Dejamos la incógnita a un solo lado)

$$6x - 3x = -20 - 2$$

(Reduciendo términos semejantes)

$$3x = -22$$

(Despejando x)

$$x = -\frac{22}{3}$$

2. Sistemas de ecuaciones:

Ahora revisaremos uno de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones más utilizados:

2.1 Eliminación por reducción:

Consiste en igualar los coeficientes de una misma incógnita en ambas ecuaciones y a continuación, sumarmas o restarmas de modo que se eliminen los términos cuyos coeficientes se igualaron.

Ejemplo:

Se tienen canguros y koalas. Si hay 55 cabezas y 170 patas. ¿Cuántos canguros y koalas hay?

c : canguros

k : koalas

Como hay 55 cabezas $\Rightarrow c + k = 55$

Además hay 170 patas, los canguros tienen 2 patas, por lo tanto, la cantidad de patas de canguro es $2 \cdot c$, los koalas tienen 4 patas, entonces, la cantidad de patas de koalas es $4 \cdot k$

Como hay 170 patas $\Rightarrow 2c + 4k = 170$, entonces:

$$1) \quad c + k = 55 \quad / \cdot -2$$

$$2) \quad 2c + 4k = 170$$

(Para eliminar c , debemos multiplicar la primera ecuación por -2)

$$\begin{array}{l} -2c - 2k = -110 \\ 2c + 4k = 170 \end{array}$$

(Sumando ambas ecuaciones)

$$2k = 60$$

(Despejando k)

$$k = \frac{60}{2}$$

(Simplificando)

$$k = 30$$

Reemplazamos “ k ” en la primera o segunda ecuación, en este caso lo haremos en la primera.

$$c + k = 55$$

(Reemplazando k)

$$c + 30 = 55$$

(Despejando c)

$$c = 55 - 30$$

$$c = 25$$

$\therefore$ Hay 25 canguros y 30 koalas

Ejercicios

1. Si $2(x - 1) + 3(x + 1) = 2x + 8$, entonces $x =$

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{3}{7}$

C) $\frac{7}{9}$

D) $\frac{9}{7}$

E) $\frac{7}{3}$

2. Si $\frac{3}{7}x + \frac{5}{14} = \frac{4}{7}x$, entonces $x =$

A) $\frac{5}{14}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{5}{2}$

E) $\frac{7}{2}$

3. Si $4 + \frac{2}{x} = 3 + \frac{4}{x}$, entonces $x =$

A) $\frac{6}{7}$

B) 2

C) 3

D) 5

E) 8

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite resolver el siguiente problema: “Si le doy la cuarta parte de mis chocolates a mi prima y le doy a mi hermano 3 más de los que le dí a mi prima, me quedo con 5” ?

A) $\frac{x}{2} + 3 = 4$

B) $\frac{x}{2} + 3 = x$

C) $\frac{x}{2} + 8 = x$

D) $\frac{3x}{2} + 3 = 4$

E) $\frac{3x}{2} + 8 = x$

5. Si $\frac{1}{3x} - \frac{1}{9x} + \frac{1}{18x} = 1$, entonces $x =$
- A) $\frac{1}{18}$
- B) $\frac{1}{9}$
- C) $\frac{1}{6}$
- D) $\frac{5}{18}$
- E) $\frac{18}{5}$
6. Si de un préstamo de \$ $7m$ se paga \$ $\frac{7}{3}m$ al contado y el resto en 8 cuotas iguales, ¿cuál es el valor de cada cuota ?
- A) \$ $\frac{7}{12}m$
- B) \$ $\frac{12}{7}m$
- C) \$ $\frac{14}{3}m$
- D) \$ $\frac{28}{3}m$
- E) Ninguno de los valores anteriores
7. Al sumar $\frac{x}{y}$ con p se obtiene $\frac{x}{y+3}$, entonces, ¿cuál es el valor de p ?
- A) 0
- B) $\frac{-3}{y(y+3)}$
- C) $\frac{-3x}{y(y+3)}$
- D) $\frac{-x}{y(y+3)}$
- E) $\frac{3x}{y(y+3)}$

8. Si $mx - c = px + \frac{d}{2}$, entonces $x =$

A) $\frac{2(d+c)}{m+p}$

B) $\frac{d-2c}{2p-2m}$

C) $\frac{d-2c}{2m-2p}$

D) $\frac{d+2c}{2m-2p}$

E) $\frac{d+2c}{m(m+p)}$

9. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 5y = 31 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \\ y = \end{matrix}$

$x \quad y$

A) $-2 \quad 7$

B) $2 \quad -7$

C) $2 \quad 7$

D) $7 \quad -2$

E) $7 \quad 2$

10. $\begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \quad x =$

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{4}{5}$

C) $\frac{5}{4}$

D) $\frac{3}{2}$

E) Ninguno de los valores anteriores

$$11. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$x \cdot y =$$

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 4
- E) 8

12. La suma de 2 números es 46 y su diferencia es 10. ¿Cuáles son los números?

- A) -28 y -18
- B) -28 y 18
- C) -18 y 28
- D) 28 y 18
- E) Ninguno de los valores anteriores

$$13. \text{ En el sistema } \begin{cases} 5x - py = 15 \\ qx + 6y = -14 \end{cases}$$

¿Qué valores deben tener p y q para que la solución del sistema sea el par $(2, -5)$?

- | | p | q |
|----|-------|-----------------|
| A) | -20 | $\frac{-26}{5}$ |
| B) | -20 | $\frac{26}{5}$ |
| C) | -1 | -8 |
| D) | -1 | 8 |
| E) | 1 | 8 |

$$14) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 9x + 6y = 12 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \\ y = \end{matrix}$$

$x \quad y$

A) $0 \quad 2$

B) $1 \quad \frac{1}{2}$

C) $2 \quad -1$

D) El sistema tiene infinitas soluciones

E) El sistema no tiene solución

15. En una granja hay patos y corderos. Si se cuentan, las cabezas son 30 y las patas 94.
¿Cuántos patos y corderos hay respectivamente ?

A) 13 y 17

B) 14 y 16

C) 16 y 14

D) 17 y 13

E) Ninguno de los valores anteriores

Respuestas

Preg.	Alternativa
1	E
2	D
3	B
4	C
5	D
6	A
7	C
8	D
9	A
10	B
11	C
12	D
13	E
14	D
15	A

Solucionario

1. La alternativa correcta es la letra E)

$$2(x - 1) + 3(x + 1) = 2x + 8$$

(Distribuyendo)

$$2x - 2 + 3x + 3 = 2x + 8$$

(Reduciendo términos semejantes)

$$5x + 1 = 2x + 8$$

(Dejamos la incógnita a un solo lado)

$$5x - 2x = 8 - 1$$

(Reduciendo términos semejantes)

$$3x = 7$$

(Despejando x)

$$x = \frac{7}{3}$$

2. La alternativa correcta es la letra D)

$$\frac{3}{7}x + \frac{5}{14} = \frac{4}{7}x \quad / \cdot 14$$

(Multiplicamos por el mínimo común múltiplo, 14)

$$14 \cdot \frac{3}{7}x + 14 \cdot \frac{5}{14} = 14 \cdot \frac{4}{7}x$$

(Simplificando y multiplicando)

$$2 \cdot 3x + 5 = 2 \cdot 4x$$

(Multiplicando)

$$6x + 5 = 8x$$

(Dejamos la incógnita a un solo lado)

$$5 = 8x - 6x$$

(Reduciendo términos semejantes)

$$5 = 2x$$

(Despejando x)

$$\frac{5}{2} = x$$

3. La alternativa correcta es la letra B)

$$4 + \frac{2}{x} = 3 + \frac{4}{x} \quad / \cdot x$$

(Multiplicamos por el mínimo común múltiplo, x)

$$4 \cdot x + \frac{2}{x} \cdot x = 3 \cdot x + \frac{4}{x} \cdot x$$

(Simplificando y multiplicando)

$$4x + 2 = 3x + 4$$

(Dejamos la incógnita a un solo lado)

$$4x - 3x = 4 - 2$$

(Reduciendo términos semejantes)

$$x = 2$$

4. La alternativa correcta es la letra C)

x : total de chocolates

$\frac{x}{4}$: cuarta parte de los chocolates

$\frac{x}{4} + 3$: cuarta parte más 3

5 : resto de los chocolates

Si sumamos los chocolates que se le dieron a la prima, los que se le dieron al hermano y los que quedaron, obtenemos el total de chocolates.

$$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + 3 + 5 = x \quad (\text{Sumando fracciones})$$

$$\frac{2x}{4} + 8 = x \quad (\text{Simplificando})$$

$$\frac{x}{2} + 8 = x$$

$$\Rightarrow \text{La ecuación que permite resolver el problema es } \frac{x}{2} + 8 = x$$

5. La alternativa correcta es la letra D)

$$\frac{1}{3x} - \frac{1}{9x} + \frac{1}{18x} = 1 \quad / \cdot 18x \quad (\text{Multiplicamos por el mínimo común múltiplo, } 18x)$$

$$18x \cdot \frac{1}{3x} - 18x \cdot \frac{1}{9x} + 18x \cdot \frac{1}{18x} = 18x \cdot 1 \quad (\text{Simplificando y multiplicando})$$

$$6 - 2 + 1 = 18x$$

$$5 = 18x \quad (\text{Despejando } x)$$

$$\frac{5}{18} = x$$

6. La alternativa correcta es la letra A)

Si le restamos al préstamo lo que se pagó al contado, obtenemos el saldo.

$$7m - \frac{7m}{3} = \quad (\text{Sacando mínimo común múltiplo})$$

$$\frac{3 \cdot 7m - 7m}{3} = \quad (\text{Multiplicando})$$

$$\frac{21m - 7m}{3} = \quad (\text{Reduciendo términos semejantes})$$

$$\frac{14m}{3} : \text{Saldo}$$

El saldo lo dividimos por 8

$$\frac{14m}{3} \div 8 \quad (\text{Aplicando división de fracciones})$$

$$\frac{14m}{3} \cdot \frac{1}{8} \quad (\text{Simplificando})$$

$$\frac{7m}{3} \cdot \frac{1}{4} \quad (\text{Multiplicando fracciones})$$

$$\frac{7m}{12}$$

$$\therefore \text{El valor de cada cuota será } \$ \frac{7m}{12}$$

7. La alternativa correcta es la letra C)

Nota : El mínimo común múltiplo entre expresiones algebraicas corresponde a todos los factores con su mayor exponente.

$$\frac{x}{y} + p = \frac{x}{y+3} \quad (\text{Despejando } p)$$

$$p = \frac{x}{y+3} - \frac{x}{y} \quad (\text{Sacando mínimo común múltiplo, } y(y+3))$$

$$p = \frac{xy - x(y+3)}{y(y+3)} \quad (\text{Distribuyendo})$$

$$p = \frac{xy - xy - 3x}{y(y+3)} \quad (\text{Reduciendo términos semejantes})$$

$$p = \frac{-3x}{y(y+3)}$$

8. La alternativa correcta es la letra D)

$$mx - c = px + \frac{d}{2} \quad (\text{Dejamos "x" a un solo lado})$$

$$mx - px = \frac{d}{2} + c \quad / \cdot 2 \quad (\text{Multiplicando por el mínimo común múltiplo, 2})$$

$$2 \cdot mx - 2 \cdot px = 2 \cdot \frac{d}{2} + 2 \cdot c \quad (\text{Simplificando y multiplicando})$$

$$2mx - 2px = d + 2c \quad (\text{Factorizando por } x)$$

$$x(2m - 2p) = d + 2c \quad (\text{Despejando } x)$$

$$x = \frac{d + 2c}{2m - 2p}$$

9. La alternativa correcta es la letra A)

$$1) \quad 3x + 2y = 8 \quad / \cdot -2$$

$$2) \quad 2x + 5y = 31 \quad / \cdot 3$$

(Para eliminar x , debemos multiplicar la primera ecuación por -2 y la segunda ecuación por 3)

$$\begin{array}{r} -6x - 4y = -16 \\ 6x + 15y = 93 \end{array}$$

(Sumando ambas ecuaciones)

$$11y = 77$$

(Despejando y)

$$y = \frac{77}{11}$$

(Simplificando)

$$y = 7$$

(Reemplazando "y" en la segunda ecuación)

$$\begin{aligned}
 2x + 5y &= 31 \\
 2x + 5 \cdot 7 &= 31 && \text{(Multiplicando)} \\
 2x + 35 &= 31 && \text{(Despejando } x) \\
 2x &= 31 - 35 \\
 2x &= -4 \\
 x &= \frac{-4}{2} && \text{(Simplificando)} \\
 x &= -2 \\
 \therefore x &= -2 && y = 7
 \end{aligned}$$

10. La alternativa correcta es la letra B)

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{array}{l} 1) \quad x = y \\ 2) \quad 2x + 3y = 4 \end{array} \right\} \text{(Utilizamos el método de sustitución, como nos piden } x, \\
 &\quad \quad \quad x = y \text{ reemplazaremos "y" en la segunda ecuación)} \\
 \Rightarrow &\quad \quad \quad 2x + 3y = 4 \\
 &\quad \quad \quad 2x + 3x = 4 && \text{(Reduciendo términos semejantes)} \\
 &\quad \quad \quad 5x = 4 && \text{(Despejando } x) \\
 &\quad \quad \quad x = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

11. La alternativa correcta es la letra C)

Como no nos piden x ó y , sino que $x \cdot y$, entonces, se resuelve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{array}{l} 1) \quad \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 2 \\ 2) \quad x + y = 2 \end{array} \right\} \text{(Multiplicando la primera ecuación por el mínimo común} \\
 &\quad \quad \quad \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 2 / \cdot xy \text{ múltiplo entre los denominadores, } xy) \\
 xy \cdot \frac{2}{x} + xy \cdot \frac{2}{y} &= xy \cdot 2 && \text{(Simplificando y multiplicando)} \\
 2y + 2x &= 2xy && \text{(Factorizando por 2)} \\
 2(x + y) &= 2xy && \text{(Reemplazando } x + y, \text{ que sabemos que es 2)} \\
 2 \cdot 2 &= 2xy && \text{(Multiplicando)} \\
 4 &= 2xy && \text{(Despejando } xy) \\
 \frac{4}{2} &= xy && \text{(Simplificando)} \\
 2 &= xy \\
 \therefore x \cdot y &= 2
 \end{aligned}$$

12. La alternativa correcta es la letra D)

Sean los números “ x ” e “ y ” $\Rightarrow$

$$1) \ x + y = 46$$

$$2) \ x - y = 10$$

(Sumando ambas ecuaciones)

$$2x = 56$$

(Despejando x)

$$x = \frac{56}{2}$$

(Simplificando)

$$x = 28$$

Reemplazando x en la primera ecuación

$$x + y = 46$$

$$28 + y = 46$$

(Despejando y)

$$y = 46 - 28$$

$$y = 18$$

$\therefore$ Los números son 28 y 18

13. La alternativa correcta es la letra E)

$$1) \ 5x - py = 15$$

$$2) \ qx + 6y = -14$$

Sabemos que $(2, -5)$ equivale a $x = 2, y = -5$

Reemplazando “ x ” e “ y ” en la primera ecuación

$$5x - py = 15$$

$$5 \cdot 2 - p \cdot -5 = 15$$

(Multiplicando)

$$10 + 5p = 15$$

(Despejando p)

$$5p = 15 - 10$$

$$5p = 5$$

$$p = \frac{5}{5}$$

(Simplificando)

$$p = 1$$

Reemplazando “ x ” e “ y ” en la segunda ecuación

$$\begin{aligned}
 qx + 6y &= -14 \\
 q \cdot 2 + 6 \cdot -5 &= -14 && \text{(Multiplicando)} \\
 2q - 30 &= -14 && \text{(Despejando } q) \\
 2q &= -14 + 30 \\
 2q &= 16 \\
 q &= \frac{16}{2} && \text{(Simplificando)} \\
 q &= 8
 \end{aligned}$$

$$\therefore p = 1, \quad q = 8$$

14. La alternativa correcta es la letra D)

$$\begin{aligned}
 1) \quad 3x + 2y &= 4 && / \cdot -3 && \text{(Multiplicamos la primera ecuación por } -3) \\
 2) \quad 9x + 6y &= 12 \\
 \hline
 -9x - 6y &= -12 && \text{(Sumando ambas ecuaciones)} \\
 9x + 6y &= 12 \\
 \hline
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Sabemos que cuando las incógnitas se eliminan, debemos analizar el resultado.

En este caso, llegamos a una igualdad

$\therefore$ El sistema tiene infinitas soluciones.

15. La alternativa correcta es la letra A)

p : patos c : corderos

Hay 30 cabezas $\Rightarrow p + c = 30$

Hay 94 patas, como los patos tienen 2 patas, entonces, el total de patas de patos es $2 \cdot p$ y los corderos tienen 4 patas, entonces, el total de patas de corderos es $4 \cdot c \Rightarrow 2p + 4c = 94$

$$\begin{aligned}
 1) \quad p + c &= 30 && / \cdot -2 && \text{(Multiplicando la primera ecuación por } -2) \\
 2) \quad 2p + 4c &= 94 \\
 \hline
 -2p - 2c &= -60 && \text{(Sumando ambas ecuaciones)} \\
 2p + 4c &= 94 \\
 \hline
 2c &= 34 && \text{(Despejando } c)
 \end{aligned}$$

$$c = \frac{34}{2} \quad (\text{Simplificando})$$

$$c = 17$$

Reemplazando “c” en la primera ecuación:

$$p + c = 30$$

$$p + 17 = 30 \quad (\text{Despejando } p)$$

$$p = 30 - 17$$

$$p = 13$$

∴ Hay 13 patos y 17 corderos