Tutorial
MT-b6

Matemática 2006

Tutorial Nivel Básico

Álgebra

CEPECH
ESPECIALISTAS DE LA PSU
Grupo Educacional Cepech

Álgebra

Marco teórico:

1. Término algebraico

El término algebraico es la unidad fundamental operativa en álgebra. Contiene multiplicaciones y/o divisiones. El número presente en el término algebraico recibe el nombre de coeficiente **numérico**, mientras que las letras reciben el nombre de coeficiente **literal**, (el coeficiente literal se ordena en forma alfabética).

Ejemplo: $5x^3y^2z$ en donde 5 es el coeficiente numérico y x^3y^2z es el coeficiente literal.

2. Expresión algebraica

Es una combinación de términos algebraicos relacionados con operaciones de suma, resta, multiplicación, división y a veces también por medio de potencias, radicación y logaritmos

Ejemplo: $4x^2 + 3y - 144$

3. Términos semejantes

Son aquellos términos que poseen el mismo factor literal.

Ejemplo:	$8x$	es semejante con	$23x$
	$12x^2y$	es semejante con	$23x^2y$
	$15x$	**no** es semejante con	$47xy^3$

4. Reducción de términos semejantes

Cuando sumamos términos algebraicos sólo podemos sumar los que son semejantes entre sí, esta operación es la que comúnmente es llamada reducción de términos semejantes la cuál consiste en sumar y/o restar los coeficientes numéricos conservando el factor literal común.

Ejemplo:

a) $4x + 10x = 14x$

b) $5x^2 + 10x - 2x = 5x^2 + 8x$

c) $6xy - 5y - 4xy = 2xy + 5y$

5. Clasificación de expresiones algebraicas

De acuerdo al número de términos que posee una expresión algebraica ésta se clasifica en:

- Monomio: expresión algebraica que posee un término. Ejemplo: $4x$
- Polinomio: expresión algebraica que posee dos o más términos. De acuerdo al número de términos algebraicos que posea un polinomio recibe el nombre de binomio(si tiene dos términos), trinomio(si posee tres términos)...

  Ejemplo: $5xy + 4 - 2xyz + 45z + 32$

Los polinomios más utilizados en la PSU son:

- Binomio: expresión algebraica que posee dos términos. Ejemplo; $5xy + 4$
- Trinomio: expresión algebraica que posee tres términos. Ejemplo; $15xy + 4x - 2y$

6. Productos notables

Estos representan casos de interés de multiplicación de polinomios, existen muchos productos notables, algunos de los más utilizados son:

I) $(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$	cuadrado de binomio
II) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	suma por su diferencia
III) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	cubo de binomio
IV) $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$	binomio por binomio
V) $(x^3 + y^3) = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$	suma de cubos
VI) $(x^3 - y^3) = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$	diferencia de cubos

7. Eliminación de paréntesis

I) Cuando el signo (+) antecede al paréntesis

En este caso para eliminar el paréntesis multiplicamos por 1 todos los elementos al interior del paréntesis.

Ejemplo: $+(4x - 3y - 2 + 5) = 4x - 3y - 2 + 5$

II) Cuando el signo (–) antecede al paréntesis

En este caso para eliminar el paréntesis multiplicamos por -1 todos los elementos al interior del paréntesis.

Ejemplo: $-(4x - 3y - 2 + 5) = -4x + 3y + 2 - 5$

III) Cuando existen paréntesis dentro del paréntesis.

Este tipo de expresiones se resuelve desde el paréntesis más interno, hasta el más externo.

Ejemplo $2(4 + 5(6 - 2))$	En éste lo primero es resolver el paréntesis interno
$2(4 + 5(4))$	luego multiplicamos el paréntesis interno
$2(4 + 20)$	por prioridad de operatoria se suma el paréntesis
$2(24)$	finalmente multiplicando:
48	

Ejercicios:

1. Reducir términos semejantes en el siguiente polinomio $(3x + 5y - 3x^2 + 4y - 10x + 2y)=$

2. Clasifique las siguientes expresiones algebraicas de acuerdo al número de términos que poseen

   a) $7abc^4$

   b) $32xy^2 + 12x - 3y + 3x^2 + 45$

   c) $3x - 4$

   d) 7

3. Elimine los siguientes paréntesis

   a) $+(4x - 3y + 2)$

   b) $-(4y + 45xy - 32x)$

   c) $4(4 - x)$

4. Desarrolle el siguiente cuadrado de binomio $(2x - 3y)^2 =$

5. Desarrolle la siguiente suma por su diferencia $(4 - 3x) \cdot (4 + 3x)=$

6. $(5 - 3x)^2 =$

A) $25 - 9x^2$
B) $25 + 9x^2$
C) $25 - 30x + 9x^2$
D) $25 + 30x - 9x^2$
E) $25 - 15x + 9x^2$

7. $-(4(5 + 2(5 - 3))) =$

A) -36
B) -13
C) 24
D) 30
E) 36

8. $(4x - 3) \cdot (2 + 3y) =$

A) $8x + 12xy - 6 - 9y$
B) $8x + 12xy - 6 + 9y$
C) $8x - 12xy - 6 - 9y$
D) $8x - 6 + 9y$
E) $8x - 6$

9. $\dfrac{(a^2 - 1)}{(a - 1)} =$ con $a \neq 1$

A) 1
B) a
C) $(a - 1)$
D) $(a + 1)$
E) $-(a)$

10. $\dfrac{(a^3 + 3a^2 + 3a + 1)}{(a^2 - 1) \cdot (a + 1)} =$ con $a \neq 1 \wedge a \neq -1$

A) 1

B) $(a + 1)$

C) $(a - 1)$

D) $\dfrac{(a + 1)}{(a - 1)}$

E) -1

11. $\dfrac{(a^2 - 2a + 1)}{(a - 1)} =$ con $a \neq 1$

A) $(a - 1)$
B) $(a - 1)^2$
C) $(a + 1)$
D) $(a - 2)$
E) $(a - 2a)$

12. $\dfrac{-(x^2 + 2 - y)}{y - 2 - x^2} =$

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2
E) Otro valor

13. Si $a = (a + 1)$, $b = (a - 1)$ y $c = (a^2 + 2a + 1)$, entonces la expresión $\dfrac{a \cdot b}{c}$, resulta

A) -1

B) 1

C) $(a + 1)$

D) $\dfrac{(a - 1)}{(a + 1)}$

E) $\dfrac{(a + 1)}{(a - 1)}$

14. ¿Cuál es el ancho de un terreno rectangular de largo $(x + 3)$ y área $(x^2 + 5x + 6)$?

A) $4x + 10$
B) $(x + 2)^2$
C) x
D) $(x + 1)$
E) $(x + 2)$

15. El lado de un cuadrado es $(2 + x)$,si el lado aumenta dos unidades, ¿cuál es el valor del área del cuadrado resultante?

A) $4 + x$
B) $16 + 4x$
C) $16 + x^2$
D) $16 + 8x + x$
E) $x^2 + 8x + 16$

Respuestas:

Preg.	Alternativa
1	$-7x + 11y - 3x^2$
2	a) monomio b) polinomio c) binomio d) monomio
3	a) $4x - 3y + 2$ b) $-4y - 45xy + 32x$ c) $16 - 4x$
4	$4x^2 - 12xy + 9y^2$
5	$16 - 9x^2$
6	C
7	A
8	A
9	D
10	D
11	A
12	C
13	D
14	E
15	E

Solucionario

1. Debemos recordar que sólo se pueden reducir los términos semejantes, o sea los que poseen el mismo coeficiente literal ,luego podemos sumar

   $3x - 10x$ resultando $-7x$
   $5y + 4y + 2y$ resultando $11y$

   la expresión $-3x^2$ no puede sumarse pues no existe otro término con ese coeficiente literal, luego $(3x + 5y - 3x^2 + 4y - 10x + 2y) = -7x + 11y - 3x^2$

2. a) La expresión posee sólo un término, por lo tanto es un monomio.

   b) La expresión posee 5 términos, por lo tanto la llamamos polinomio.

   c) La expresión posee 2 términos, por lo tanto la llamamos binomio.

   d) La expresión posee sólo un término (sólo el coeficiente numérico), por lo tanto la llamamos monomio.

3. a) El paréntesis está antecedido de un signo (+), para eliminarlo multiplicamos su "interior" por uno resultando:

   $4x - 3y + 2$

   b) El paréntesis está antecedido de un signo (–), para eliminarlo multiplicamos su "interior" por -1 resultando:

   $-4y - 45xy + 32x$

   c) Esta expresión corresponde a la multiplicación de un monomio por un binomio, para lo cuál debemos multiplicar término a término.

   Dado que $4 \cdot 4 = 16$ y $4 \cdot -x = -4x$, entonces:

   $4 \cdot (4 - x) =$

   $4 \cdot 4 - 4 \cdot x = 16 - 4x$

4. $(2x - 3y)^2 =$

   Recordemos de forma "literal" la fórmula de cuadrado de binomio, "debemos elevar al cuadrado el primer término, luego multiplicar dos veces el primer por el segundo término y finalmente elevar al cuadrado el segundo término".

Luego, $2x$ al cuadrado es $(2x)^2 = 4x^2$
$-3y$ al cuadrado es $(-3y)^2 = 9y^2$

y finalmente el doble del primer término por el segundo es $2 \cdot 2x \cdot -3y = -12xy$

, luego $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

5. $(4 - 3x) \cdot (4 + 3x) =$

   Recordemos de forma "literal" la fórmula de suma por su diferencia, "debemos elevar al cuadrado el primer término y restarle el segundo término al cuadrado"

   , luego 4 al cuadrado es 16

   $(3x)$ al cuadrado es $9x^2$

   , luego $(4 - 3x) \cdot (4 + 3x) = 4^2 - (3x)^2 = 16 - 9x^2$

6. Alternativa correcta letra C)

   La expresión $(5 - 3x)^2$ es un cuadrado de binomio, luego la desarrollamos con la fórmula

   $(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$ en donde $a = 5$ y $b = 3x$, luego

   $(5 - 3x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2$ desarrollando las potencias ,resulta
   $= 25 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + 9x^2$ multiplicando el término central
   $= 25 - 30x + 9x^2$

7. Alternativa correcta letra A)

   $-(4(5 + 2(5 - 3))) =$ Recordemos que en este tipo de expresiones debemos comenzar resolviendo el paréntesis más interno, luego

   $-(4(5 + 2(2))) =$ multiplicando el paréntesis interno

   $-(4(5 + 4)) =$ sumando el paréntesis interno

   $-(4(9)) =$ multiplicando el paréntesis interno

   $-(36) =$ finalmente para eliminar el paréntesis que está antecedido por el signo (–), multiplicamos el interior por -1 ,luego

   $-(36) = - 36$

8. Alternativa correcta letra A)

$(4x - 3) \cdot (2 + 3y) =$ resolvemos multiplicando término a término

$4x \cdot 2 + 4x \cdot 3y - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3y =$, luego multiplicando cada término

$8x + 12xy - 6 - 9y$

9. Alternativa correcta letra D)

Observemos que la expresión $(a^2 - 1)$ corresponde a una suma por su diferencia de los binomios $(a - 1)(a + 1)$, luego

$\dfrac{(a^2 - 1)}{(a - 1)} = \dfrac{(a - 1) \cdot (a + 1)}{(a - 1)}$, luego simplificando los binomios iguales en numerador y denominador, resulta

$$\frac{(a - 1) \cdot (a + 1)}{(a - 1)} = (a + 1)$$

10. Alternativa correcta letra D)

Observemos que la expresión $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ corresponde al cubo de binomio de

$(a + 1)^3$ y

Que la expresión $a^2 - 1$ corresponde a una suma por su diferencia de los binomios

$(a - 1) \cdot (a + 1)$, luego

$\dfrac{(a^3 + 3a^2 + 3a + 1)}{(a^2 - 1) \cdot (a + 1)} = \dfrac{(a + 1) \cdot (a + 1) \cdot (a + 1)}{(a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a + 1)}$, luego simplificando los binomios iguales

en numerador y denominador, resulta $\dfrac{(a + 1)}{(a - 1)}$,

11. Alternativa correcta letra A)

Observemos que la expresión $a^2 - 2a + 1$ corresponde al cuadrado de binomio de

$(a - 1)^2$, luego

$\dfrac{(a^2 - 2a + 1)}{(a - 1)} = \dfrac{(a - 1) \cdot (a - 1)}{(a - 1)} =$ luego simplificando los binomios iguales en numerador y denominador, resulta:

$$\frac{(a - 1) \cdot (a - 1)}{(a - 1)} = (a - 1)$$

12. Alternativa correcta letra C)

$$\frac{-(x^2 + 2 - y)}{y - 2 - x^2} =$$

En este caso para eliminar el paréntesis del numerador multiplicamos por –1 todos los elementos al interior del paréntesis.

$$\frac{-x^2 - 2 + y}{y - 2 - x^2} =$$

, luego ordenando el numerador, resulta:

$$\frac{y - 2 - x^2}{y - 2 - x^2} =$$

, finalmente simplificando, resulta:

$$\frac{y - 2 - x^2}{y - 2 - x^2} = 1$$

13. Alternativa correcta letra D)

si a = $(a + 1)$, $b = (a - 1)$ y $c = (a^2 + 2a + 1)$, entonces la expresión $\frac{a \cdot b}{c}$ = , resulta:

Si reemplazamos los valores de a, b, c en $\frac{a \cdot b}{c}$, resulta:

$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{(a + 1) \cdot (a - 1)}{(a^2 + 2a + 1)} =$$

observemos que $a^2 + 2a + 1$ es el cuadrado de binomio de $(a + 1)$, luego

$$\frac{(a + 1) \cdot (a - 1)}{(a + 1)\,(a + 1)} =$$

luego simplificando los binomios iguales en numerador y denominador, resulta:

$$\frac{(a - 1)}{(a + 1)} =$$

14. Alternativa correcta letra E)

Si analizamos el producto notable $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$ podemos observar que

$$(x^2 + 5x + 6) = (x + 3) \cdot (x + 2)$$

, luego si recordamos que el área de un rectángulo es largo por ancho, si el largo es $(x + 3)$ y el área es $(x^2 + 5x + 6)$, entonces

$$(x + 3) \cdot \textit{ancho} = x^2 + 5x + 6$$

reemplazando,

$(x + 3) \cdot \boldsymbol{ancho} = (x + 3) \cdot (x + 2)$ despejando el ancho, resulta:

$\boldsymbol{ancho} = \dfrac{(x + 3) \cdot (x + 2)}{(x + 3)} =$ luego simplificando los binomios iguales en numerador y denominador, resulta:

$\dfrac{(x + 3) \cdot (x + 2)}{(x + 3)} = (x + 2)$

15. Alternativa correcta letra E)

El lado de un cuadrado es $(2 + x)$, si el lado aumenta dos unidades, cuál es el valor del área del cuadrado resultante

Si el lado del cuadrado es $(2 + x)$, aumenta en dos significa que tenemos que sumarle dos, luego $(2 + x) + 2 = x + 4$ que es el valor del cuadrado resultante

, luego recordando que el área de un cuadrado se obtiene al elevar al cuadrado el lado del mismo, podemos calcular el área del cuadrado resultante elevando al cuadrado $(x + 4)$, finalmente

$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$