

## Dynamiques des cristaux liquides sous rétro-injection optique

C. Riera, M. Clerc, P. Couillet

*I.N.L.N.*

*1361, route des Lucioles*

*06560 Valbonne-Sophia Antipolis*

*riera@inln.cnrs.fr*

### Résumé

Nous nous proposons, à partir des équations de la dynamique d'une cellule de cristal liquide et des équations d'optiques caractérisant la rétro injection, de dériver un modèle simple permettant l'étude de la formation de structures spatiales.

Le cristal liquide montre une grande richesse de comportements dynamiques [1], son interaction avec la lumière permet d'observer l'apparition de structures spatiales comme des rouleaux, des hexagones, des carrés, ainsi que des transitions de depinning, des structures localisées, et leurs instabilités comme dans le cas des cholestériques [2]. Nous nous intéressons à la dynamique des molécules de cristal liquide sous rétro injection optique. Le cristal liquide agit sur la lumière en modifiant sa phase, qui agit sur le cristal liquide via le photoconducteur, ce qui ferme la boucle d'interaction. Cependant, l'aspect non locale de la rétro injection rend l'ensemble des équations régissant cette expérience assez lourd à manipuler pour comprendre cette dynamique. Nous nous proposons de dériver de ces équations un modèle plus simple nous permettant de se ramener à des résultats théoriques déjà existants dans le cas unidimensionnel [3]. Le cas loin de la transition de Fréedericks a fait l'objet d'une dérivation d'un modèle en utilisant un ansatz pour la dynamique des cristaux liquides. Nous nous proposons d'étudier le cas proche de la transition de Fréedericks où il est possible de contrôler les approximations sur le modèle et de garder la symétrie miroir par rapport à l'orientation du directeur des molécules de cristal liquide.

## 1 Description du L.C.L.V. avec une rétro injection optique

L.C.L.V. pour Liquid Crystal Light Valve se compose essentiellement d'un miroir diélectrique qui est interposé entre une couche d'un matériau photoconducteur et d'une couche de cristal liquide qui dans notre cas possède un ancrage planaire (fig.1). Le cas homéotrope est en cours d'étude, il fait appel à deux paramètres d'ordre et sa dynamique est plus complexe et donc plus riche. L'illumination de la face postérieure de la LCLV crée une différence de potentiel entre les parois de la cellule de cristal liquide, ce qui change l'orientation de l'axe des directeurs et donc crée une différence d'indice de réfraction locale, ce changement agit sur la polarisation de la lumière qui traverse la cellule et qui va ensuite illuminer la face photoconducteur de la valve, la boucle de rétro injection est ainsi fermée.

Deux polariseurs permettent de contrôler des paramètres du système expérimental, le premier correspond à la polarisation de la lumière à la sortie du laser, le deuxième à la polarisation de la lumière réinjectée. Nous verrons par la suite que ces deux paramètres seront utiles pour le contrôle des bifurcations qui interviennent dans ce type d'expérience.

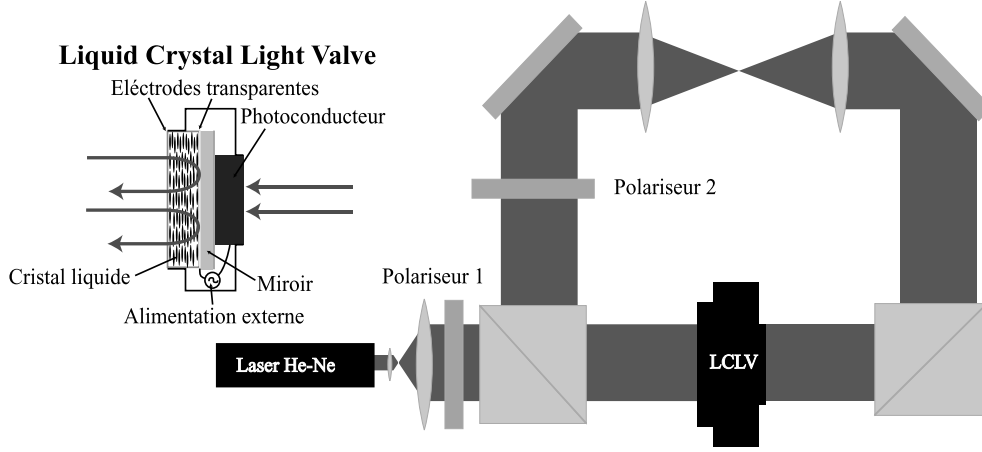


FIG. 1 – Schéma de principe de la valve optique à cristal liquide sous rétro injection optique.

### 1.1 La partie optique

Cette partie est donc exclusivement formée des éléments qui prennent part dans l'effet de la rétro injection. Le laser éclaire la cellule de cristal liquide avec un champ électrique polarisé avec un angle  $\psi_1$  et une intensité  $E_{in}$ , la phase du champ électrique est alors modulée par la différence d'indice de réfraction du cristal liquide, le rôle du polariseur sur le trajet de la lumière est de changer la modulation de phase en modulation d'amplitude.

$$\vec{E}_m = \mathcal{M}\mathcal{P}\vec{E}_{in} \quad (1)$$

où  $\vec{E}_m$  est le champ électrique modulé après son passage dans la cellule de cristal liquide et le polariseur 2 d'axe de polarisation  $\psi_2$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$  sont respectivement les matrices décrivant l'action de la cellule de cristal liquide et du polariseur.

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi_2 & \sin \psi_2 \cos \psi_2 \\ \sin \psi_2 \cos \psi_2 & \sin^2 \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} e^{-i\Phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

où  $\Phi = 2kd\Delta n \cos^2 \theta$  est le décalage de phase non-linéaire introduit par la cellule de cristal liquide, avec  $k$  le nombre d'onde du champ électrique,  $d$  l'épaisseur de la cellule de cristal liquide,  $\Delta n$  la différence entre l'indice extraordinaire et ordinaire du cristal liquide, et enfin  $\theta$  correspond à l'angle d'inclinaison du directeur par rapport à la paroi. Après cela, le champ électrique se propage librement sur une distance  $L$  jusqu'au photoconducteur. A la suite du polariseur, le caractère vectoriel du champ n'a plus lieu d'être, ce qui permet de décrire la libre propagation de l'onde d'une manière scalaire par l'équation de Fresnel de diffraction.

$$E_f = e^{-i\frac{L}{2k}\nabla_{\perp}^2} E_m \quad (3)$$

L'intensité au niveau du photoconducteur a alors la forme suivante

$$I(\theta, \vec{\nabla}_{\perp}) = |e^{-i\frac{L}{2k}\nabla_{\perp}^2} (\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 e^{-2ikd\Delta n \cos^2 \theta})|^2 E_{in}^2 \quad (4)$$

Cette intensité est ensuite transformée en différence de potentiel entre les parois de la cellule de cristal liquide par le photoconducteur en suivant une loi empirique. Dans le cas où l'intensité est faible, la différence de potentiel dépend linéairement de l'intensité

$$V(I) = V_b + \mu_p I(\theta, \vec{\nabla}_{\perp}) \quad (5)$$

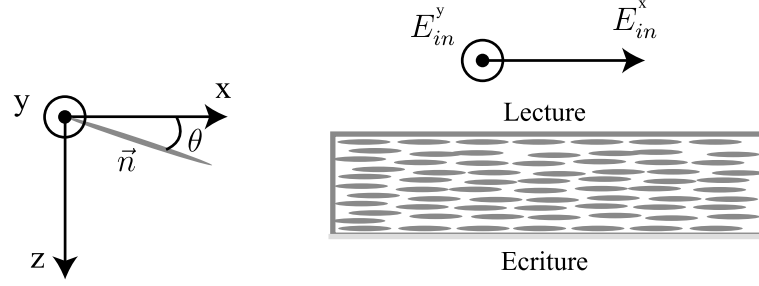


FIG. 2 – Définition des variables d'orientation.

où  $V_b$  correspond à la tension de base entretenue par une alimentation extérieure, ces deux coefficients dépendent des paramètres propres du photoconducteur. Le champ électrique appliqué à la cellule de cristal liquide dépend alors du directeur des molécules de cristal liquide.

## 1.2 La partie cristal liquide

La dynamique des molécules de cristal liquide est basée sur l'existence d'une énergie libre (Frank-Ossen) qui traduit les effets de déformation élastique ainsi que les interactions des molécules avec un champ magnétique ou électrique. Les termes de l'énergie libre doivent vérifier les symétries du directeur, la partie associée aux déformations élastiques s'écrit

$$\mathcal{F}_{elastique} = \int \frac{1}{2} \left[ K_1 (\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{n})^2 + K_2 (\vec{n} \cdot (\vec{\nabla}_\perp \times \vec{n}))^2 + K_3 (\vec{n} \times (\vec{\nabla}_\perp \times \vec{n}))^2 \right] d\vec{r} \quad (6)$$

où  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  sont respectivement les constantes élastiques de déformation en éventail, de torsion et de courbure. Comme nous l'avons vu précédemment le champ électrique dépend du directeur, cette dépendance apparaît dans l'énergie libre d'interaction avec un champ électrique via un terme supplémentaire à ce qui est obtenu usuellement.

$$\mathcal{F}_{electrique} = \int \frac{\epsilon}{2} \vec{E}(\vec{n}) \cdot \vec{E}(\vec{n}) d\vec{r} - \int \frac{\epsilon_a}{2} (\vec{E}(\vec{n}) \cdot \vec{n})^2 d\vec{r} \quad (7)$$

Le système tend à minimiser l'énergie libre via une force qui exerce sur les molécules de cristal liquide un couple. A ce couple s'oppose un couple visqueux tendant à ralentir la rotation des molécules par dissipation visqueuse. L'équilibre entre les deux couples mène à une équation dynamique du directeur [1].

$$\gamma \vec{n} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = -\vec{n} \times \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{n}} \quad (8)$$

La validité de cette équation suppose que les effets inertiels sont négligeables et qu'il n'existe pas de mouvements hydrodynamiques, ce qui est en général vérifié pour les nématiques dans le cadre de ce système expérimental.

## 2 Dérivation du modèle

Nous nous plaçons proche de la transition de Fréedericks qui expérimentalement peut être réalisée grâce à la tension extérieure du photoconducteur. Le paramètre d'ordre  $n_z$

étant la composante suivant  $\hat{z}$  du directeur, les autres composantes s'en déduisent en notant que le directeur est unitaire  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$  (fig.2). Le paramètre d'ordre est développé en série de Fourier en tenant compte des conditions aux bords qui correspondent à un ancrage planaire,  $n_z = 0$  aux parois

$$n_z = u(t, \vec{\nabla}_\perp) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) + \sum_{l=2}^{\infty} p_l(t, \vec{\nabla}_\perp) \sin\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \quad (9)$$

La variation spatiale du directeur est supposée petite, les termes de dérivés supérieurs à 2 peuvent alors être négligés, ce qui mène au modèle suivant

$$\partial_t u = \mu u + \alpha u^3 - u^5 + \nu \vec{\nabla}_\perp^2 u + \beta(u^2 \vec{\nabla}_\perp^2 u + u(\vec{\nabla}_\perp \cdot u)^2) \quad (10)$$

Les coefficients  $\mu, \alpha, \nu$  et  $\beta$  dépendent des paramètres physiques du système expérimental d'une façon complexe. Il faut juste noter qu'en fonction de l'orientation du polariseur 2 et de l'amplitude du champ électrique à la sortie du laser, le coefficient  $\alpha$  du terme cubique peut s'annuler et devenir positif, ce qui nécessite l'apport d'un terme quintique pour assurer la saturation.

Proche de la transition de Fréedericks le système est décrit par une équation de Landau, c'est à dire sans les termes spatiaux non linéaires, elle peut donc être du premier ordre, et cela est un effet propre à la rétro injection optique qui ajoute un nouveau terme dans l'énergie libre  $\epsilon \int (\vec{E}(\vec{n}))^2 d\vec{r}$ . Loin de la transition, le système peut présenter une instabilité spatiale associée à la présence du terme de diffusion non linéaire  $\beta u^2 \vec{\nabla}_\perp^2 u$ . L'aspect sous-critique de la bifurcation et la possibilité d'une structure spatiale sur les branches de l'état bifurqué mène à une bistabilité entre un état homogène et un état spatialement périodique. Cette bistabilité associée à la réversibilité de la structure spatiale est à l'origine de certaines formes de structures localisées [3]. Le terme  $\beta u(\vec{\nabla}_\perp \cdot u)^2$  est responsable de l'apparition de structures spatiales carrées observées expérimentalement [4]. Les deux termes spatiaux non linéaires et les symétries du problème ainsi que son aspect variationnel imposent l'ajout d'un terme spatial de dérivé quatrième  $\vec{\nabla}_\perp^4 u$ . Ce modèle permet d'apporter une explication à l'apparition de différentes structures spatiales comme les rouleaux, les hexagones, ou l'instabilité zig-zag des rouleaux [5]. Ce type de comportement peut être aussi observé dans d'autres systèmes expérimentaux tel que les réactions chimiques, les laser à semiconducteur, les résonateurs paramétriques optiques ou d'autres instabilités paramétriques. Enfin récemment [6], ce type d'instabilité pour les oscillons, a été abordé en utilisant un modèle scalaire associé au mode subharmonique qui devient instable. Ce modèle reprend la structure de l'équation ci-dessus avec le terme de dérivée quatrième.

## Références

- [1] P. De Gennes, *The physics of liquid crystals*, Clarendon Press (Oxford 1974)
- [2] S. Thiberge, *Structures cholestériques et dynamique hors équilibre*, Thèse Université de Nice (Nice 1999)
- [3] P. Couillet, C. Riera, C. Tresser, Phys. Rev. Lett., to appear (2000)
- [4] R. Neubecker, G.L. Oppo, B. Thuring, T. Sschudi, Phys. Rev. A **52**, 791 (1995).
- [5] M. Kreuzer, A. Schreiber and B. Thuring, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **282**, 91 (1996)
- [6] C. Crawford, H. Riecke, Physica D **129**, 83 (1999)