

Dynamique bidirectionnelle dans le laser en anneau

M. Clerc et P. Coullet

*Institut Non Linéaire de Nice, UMR 6618 CNRS-UNSA
1361 Route des Lucioles, F-06560 Valbonne, France
clerc@inln.cnrs.fr*

Résumé

Le but de ce papier est de proposer une description détaillée de l'instabilité qui donne lieu à la vacillation chaotique des ondes droites et ondes gauches dans un laser en anneau. Des équations d'amplitudes décrivant cette instabilité sont dérivées des équations de Maxwell-Bloch.

Les lasers en anneau fournissent de nombreuses applications technologiques potentielles [1]. Une des plus prometteuses est l'utilisation du laser en anneau tant que gyroscope, car sa longueur d'onde est de l'ordre de 10^{-7} m. Le fonctionnement de cet instrument est basé sur la présence d'ondes stationnaires stables. Cependant le laser en anneau présente des comportements dynamiques très complexes [2]. La difficulté de l'étude de ces comportements, dans le cadre des équations d'amplitude, réside dans l'analyse générale de la transition laser. La plupart du temps en effet, des instabilités secondaires se produisent au voisinage de la bifurcation. Les observations expérimentales ont montré que le comportement dynamique le plus robuste pour un tel système consiste en fait en une alternance périodique ou chaotique d'ondes propagatives droite et gauche [3,4]. Une bonne compréhension qualitative du mécanisme d'alternance a été apportée par l'emploi des approximations de Galerkin appliquées aux équations de Maxwell-Bloch [5].

La description dynamique du laser en anneau est basée sur l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière (milieu actif) dans l'approximation semi-classique. Le champ électromagnétique est décrit classiquement (équation de Maxwell) et la matière est décrite comme un ensemble de molécules ou atomes à deux niveaux quantiques (équation de Bloch); quelques effets phénoménologiques complètent la description (dissipation et injection d'énergie). Le système est alors décrit par l'équation sans dimension suivante (Maxwell-Bloch) [1,2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - 2\kappa \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= -2\gamma_{\perp} \frac{\partial P}{\partial t} - (\gamma_{\perp}^2 + (1 + \Delta)^2)P - gNE, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel}(N - D_0) + E \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma_{\perp} P \right),\end{aligned}\tag{1}$$

avec des conditions aux bords périodiques données par la géométrie en anneau. E , P , et N représentent respectivement le champ électrique, le champ de polarisation diélectrique et l'inversion de population. γ_{\parallel} est le taux décroissant associé à l'émission spontanée, γ_{\perp} est le taux associé à l'interaction entre molécules ou atomes, κ est la dissipation du champ électrique, laquelle est principalement déterminée par le coefficient de transmission des miroirs; Δ est le désaccord, g est la constante qui caractérise les molécules ou les atomes,

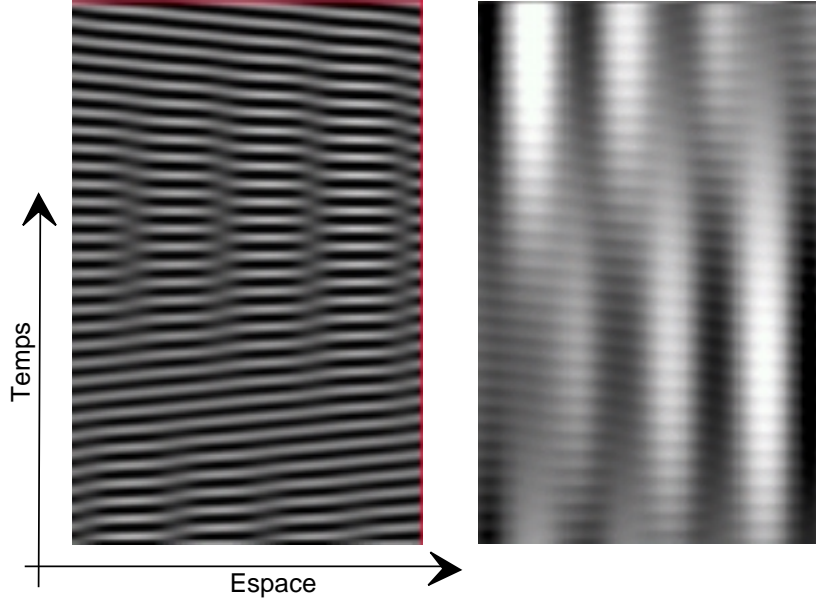


FIG. 1: *Simulation numérique de l'équation de Maxwell-Bloch. Sur la figure de gauche a été portée l'évolution spatio temporelle du champ électrique, sur la figure de droite celle de l'inversion de population.*

et D_o est le pompage. Le système présente une instabilité quand le pompage excède une valeur critique $D_{o,c} = \frac{4\gamma_{\perp}\kappa}{g} \left(1 + \frac{\Delta^2}{2(\gamma_{\perp} + \kappa)^2}\right)$.

Les valeurs des paramètres sont de l'ordre de 10^{-7} à 10^{-3} , ce qui complique l'étude numérique. Pour comprendre le comportement dynamique présenté par le laser en anneau, nous allons considérer des valeurs peu réalistes de paramètres (de l'ordre de 10^{-1}). Les simulations numériques ont montré, au voisinage de la bifurcation, l'apparition d'ondes propagatives stables (voir fig.1). Ceci est confirmé théoriquement grâce aux équations d'amplitude obtenues par l'analyse asymptotique habituelle :

$$\begin{aligned}\partial_t A &= \tilde{\mu} A + \frac{e^{i\alpha}}{\gamma_{\parallel}} (|A|^2 + |B|^2) A, \\ \partial_t B &= \tilde{\mu} B + \frac{e^{i\alpha}}{\gamma_{\parallel}} (|A|^2 + |B|^2) B,\end{aligned}\tag{2}$$

avec

$$\begin{aligned}\epsilon &= N_o - N_{o,c}, \quad \omega_c = \frac{\Delta\kappa}{\kappa + \gamma_{\perp}} + \frac{b\epsilon}{a^2 + b^2}, \quad \mu \equiv \frac{a(D_o - D_{o,c})}{a^2 + b^2}, \quad \tan \alpha = \frac{\Delta(\kappa - \gamma_{\perp})}{(\gamma_{\perp} + \kappa)^2} \\ a &\equiv \frac{g(\gamma_{\perp} + \kappa)^3}{4\left((\gamma_{\perp} + \kappa)^4 + (\Delta(\kappa - \gamma_{\perp}))^2\right)}, \quad b \equiv \frac{\Delta g(\gamma_{\perp}^2 - \kappa^2)}{4\left((\gamma_{\perp} + \kappa)^4 + (\Delta(\kappa - \gamma_{\perp}))^2\right)}\end{aligned}$$

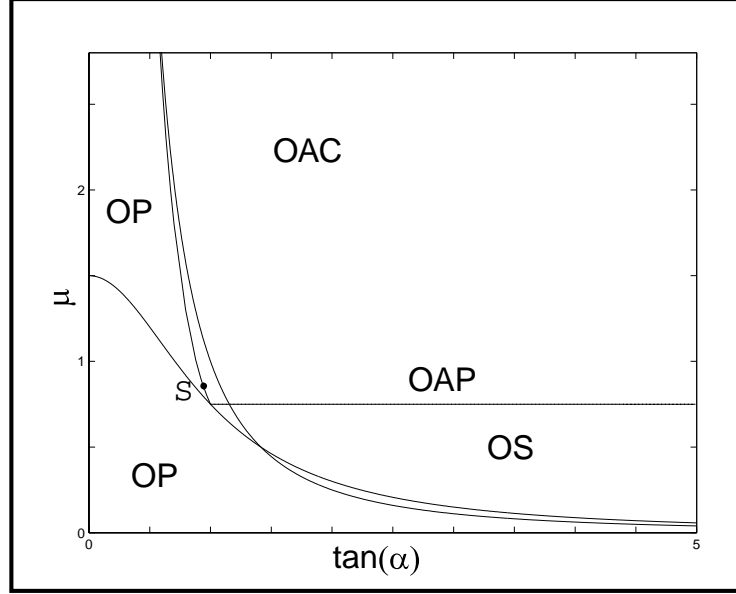


FIG. 2: Diagramme de bifurcation associé à la dynamique de l'équation(4) : les lignes correspondent à la perte de stabilité des différentes solutions.

où les amplitudes sont reliées aux variables physiques par

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E \\ P \\ N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{o,c} \end{pmatrix} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{\kappa}} A(T) e^{i((1+\omega_c)t-kx)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2\Delta\kappa}{(\kappa+\gamma_{\perp})} + i2\kappa \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{\epsilon}{2\sqrt{\kappa}} B(T = \epsilon t) e^{i((1+\omega_c)t+kx)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2\Delta\kappa}{(\kappa+\gamma_{\perp})} + i2\kappa \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &- \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\parallel}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |A|^2 + |B|^2 \end{pmatrix} - \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\parallel}} e^{i2kx} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{A} B \end{pmatrix} + o(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{3}$$

μ étant le paramètre de bifurcation. Lorsque μ est positif, les ondes propagatives sont stables. Néanmoins expérimentalement, ces ondes sont observées sur un petit domaine de stabilité. L'alternance périodique ou chaotique d'ondes propagatives droite et gauche est le comportement dynamique le plus robuste [3,4,5]. Les simulations numériques de l'équation de Maxwell-Bloch ont permis d'observer ce type de comportement (voir fig.1). Il est important de noter que l'alternance d'ondes est liée à la présence d'inhomogénéités spatiales dans l'inversion de population; ceci peut se comprendre grâce à l'argument suivant : le mécanisme microscopique responsable de l'instabilité laser est l'émission stimulée, dans laquelle les photons sont émis dans la même direction que le photon qui a engendré l'émission. On peut donc s'attendre à ce que, lorsque le système est dans un état homogène (l'index de réfraction est constant), une onde propagative soit stable, en revanche, quand le milieu actif est inhomogène (l'index de réfraction change spatialement), une onde propagative peut créer une onde propagative dans la direction opposée, ces ondes pouvant être stables ou pas (nous verrons cela plus tard).

Les observations précédentes suggèrent de considérer plus de modes, ce qui enrichit la dynamique. En choisissant γ_{\parallel} de l'ordre de ϵ , l'équation au voisinage de la bifurcation

devient une équation quadratique, où apparaissent les nouvelles amplitudes N_o and N_2 , qui sont reliées aux variables initiales par un changement de variables semblable à celui de (3). Les amplitudes satisfont alors le système suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t A &= \mu A + e^{i\alpha}(N_o A + \bar{N}_2 B), \\ \partial_t B &= \mu B + e^{i\alpha}(N_o B + N_2 A), \\ \partial_t N_2 &= -N_2 - \bar{A}B, \\ \partial_t N_o &= -N_o - \left\{ |A|^2 + |B|^2 \right\},\end{aligned}\tag{4}$$

avec $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\gamma_{\parallel}}$. Pour γ_{\parallel} grand, nous retrouvons l'équation (2). De plus, au voisinage de l'instabilité, tous les scénarios physiques sont décrits par les deux paramètres $\{\mu, \alpha\}$, comme nous décrirons cela plus tard (voir Fig.2), où μ est lié à l'écart au seuil et α au désaccord.

L'équation d'amplitude (4) possède les solutions suivantes :

- onde propagative (OP),
- onde stationnaire (OS), qui est la superposition d'ondes propagatives droite et gauche de même amplitude,
- onde mélangée (OM), qui est la superposition d'ondes propagatives droite et gauche d'amplitudes différentes,
- onde alternée périodique (OAP), qui oscillent périodiquement dans le temps entre des ondes propagatives droite et gauche,
- onde alternée chaotique (OAC), qui oscillent chaotiquement dans le temps entre des ondes propagatives droite et gauche.

Si nous considérons que l'écart au seuil et le désaccord sont petits ($\mu \ll 1$ et $\Delta \ll 1$), la seule solution stable est l'onde propagative

$$A = R e^{-i(\mu \tan \alpha)t}, \quad B = 0, \quad N_o = 0, \quad N_2 = -R^2,$$

et sa symétrique qui s'exprime en changeant A par B. Le domaine de paramètre est équivalent à celui obtenu pour γ_{\parallel} grand, et nous récupérons le résultat de l'équation (2).

Si nous augmentons le désaccord, nous décrivons une trajectoire décroissante dans les diagrammes $\{\mu, \alpha\}$ (μ dépend de l'inverse du désaccord), donc les OP sont toujours stables. Considérons maintenant un désaccord petit mais μ d'ordre fractionnaire : les OP sont encore stables, mais quand nous augmentons le désaccord elles perdent leur stabilité pour faire apparaître des OM, ce qui se produit sur la courbe $\mu = \cot^2 \alpha$. Les OM ont la forme suivante:

$$A \equiv R \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\theta}, \quad B \equiv R \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\varphi}, \quad N_o \equiv S e^{i\chi}, \quad N_2 = -R^2$$

avec

$$\begin{aligned}R^2 &= \frac{\mu}{\left(1 + \frac{\sin(\phi)^2 \cos(\zeta)^2}{2}\right) \cos(\alpha)}, \quad S = -\frac{R^2}{2} \sin(\phi) \cos(\zeta), \\ \cos^2(\phi) &= \frac{\sin(\alpha)^2 (2\mu - 3 \cos(\alpha)^2)}{\cos(\alpha)^2 (3 \cos(\alpha)^2 - 1)}, \quad \tan^2(\zeta) = \frac{2\mu - 3 \cos(\alpha)^2}{(3 \cos(\alpha)^2 - 1)}.\end{aligned}\tag{5}$$

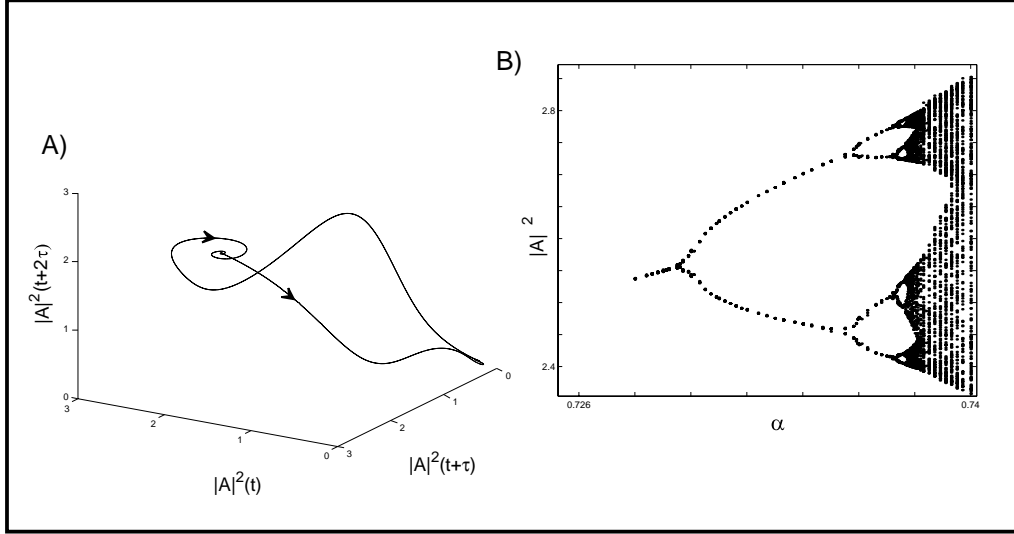


FIG. 3: La figure de gauche présente la reconstruction de l'orbite heteroclinic par la méthode de retards. La figure de droite : section de Poincaré déterminée pour par la valeur constante $|B| = 1$ et pour μ donné ($\mu = 4$).

Si nous continuons à augmenter le désaccord, les OM fusionnent et leur stabilité change sur la courbe $\mu = \frac{3}{2} \cos^2 \alpha$, l'OS apparaît alors comme seule solution stable. L'OS a la forme:

$$A \equiv \sqrt{\frac{\mu}{3 \cos(\alpha)}} e^{i\theta}, \quad B \equiv \sqrt{\frac{\mu}{3 \cos(\alpha)}} e^{i\varphi}, \quad N_0 \equiv \frac{\mu}{3 \cos(\alpha)} e^{i\chi}, \quad N_2 = -\frac{2\mu}{3 \cos(\alpha)}$$

avec $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\varphi - \theta - \chi = 2n\pi$. Nous remarquons que cette OS peut être de grande utilité par ses applications dans le gyroscope. Si nous augmentons encore le désaccord, l'OS perd sa stabilité et réapparaît une OM. Plus loin encore, les OM perdent leur stabilité pour devenir des OP (ces dernières sont stables pour les grands désaccords).

Considérons de nouveau un désaccord petit mais avec cette fois-ci, μ del'ordre de un : les OP sont stables. Lorsque nous augmentons le désaccord, nous rencontrons la courbe $\mu = \frac{3}{2} \cos^2 \alpha$, où l'OS devient stable à cause de l'apparition des OM instables : il y a coexistence entre l'OS et les OP. Si nous augmentons le désaccord, les OM rendent instables les OP, qui laisserent aux OS comme la seule solution stable. Le scénario de stabilité de l'OS est le même que précédemment.

Lorsque nous sommes très loin du seuil ($\mu \gg 1$) et que le désaccord est petit, les OP sont encore stables, mais si on augmente le désaccord, elles cessent d'être stables ($\mu = \frac{3}{2} \cos^2 \alpha$), pour créer une solution hétérocline de type Shilnikov qui unit les deux OP, comme est montré sur la fig.3. Une nouvelle augmentation fait apparaître le comportement chaotique de la solution hétérocline, par doublement de période [6], comme l'illustre la fig.3. Plus loin encore, le chaos disparaît par cascade inverse et donne finalement naissance à une OAP (cycle limite dans l'espace des amplitudes). Continuer à augmenter le désaccord fait disparaître les OPA par une bifurcation de Hopf inverse sur la courbe $\{\mu = \frac{3}{4}, \alpha \geq \frac{\pi}{4}\}$, ce qui produit l'apparition d'une OS stable. dont le scénario de stabilité est celui décrit antérieurement.

On peut noter que l'étude précédente est plus simple quand on élimine deux phases dans l'équation (4) [7].

La difficulté de l'analyse des équations de Maxwell-Bloch par des équations d'amplitude vient de la nature quasi-réversible du problème [8]. La dégénérescence des systèmes réversibles est généralement supprimée quand l'atténuation et le forçage sont pris en considération. Ici nous avons favorisé une limite asymptotique simple qui contient plusieurs des phénomènes observés dans l'expérience. Certains aspects importants sont cependant absents, comme par exemple les oscillations atténuées généralement observées près du seuil du laser. Une manière simple de prendre en compte ces aspects importants est de considérer une limite asymptotique plus générale.

En résumé, nous avons donné une description détaillée de l'instabilité qui donne lieu à la vacillation chaotique des ondes droites et ondes gauches dans un laser en anneau. Des équations d'amplitudes décrivant cette instabilité sont dérivées des équations de Maxwell-Bloch. Les équations d'amplitude quadratiques sont également valables pour un laser de classe B. Nous obtenons dans ce cas un accord qualitatif avec l'expérience [3].

Références :

- [1] A. E. Siegman, *Laser* (University Science books, MillValley,1986).
- [2] A. Newell, J. Moloney, *Nolinear optics* (addison-wesley,redwood, 1992).
- [3] D. Y. Tang, R. Dykstra, N. R. Heckenberg, *Antiphase dynamics in an optically pumped Bidirectional Ring Laser*, *Optic. Com.* **126**,318 (1996).
- [4] N. V. Kravtsov and E. G. Lariontsev, *Self modulation oscillations and relaxation processes in solid-state ring laser*, *Quamtun Electronic* **24**, 841 (1994).
- [5] H. Zeghlache, P. Mandel, N. B. Abraham, L. M.Hoffer, G.L. Lippi, T. Mello, *Bidirectional Ring laser: stability analysis and time-dependent solutions*, *Phys. Rew. A* **37**, 470 (1988).
- [6] A. Arneodo, P. H. Couillet, E. A. Spiegel, and C. Tresser, *asymptotic chaos*, *Physica D* **14**, 327 (1985).
- [7] M. Clerc, P. Couillet, *Chaotic Alternation of Waves in Ring Laser* (summitted à PRA, preprint INLN 1999).
- [8] M. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui, *The Maxwell-Bloch description of 1/1 resonances* (summitted à Opt. Comm., preprint INLN 1999).