Control I
Mecánica FI2001-2012-01

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliares: Yair Zárate
Tiempo 3 horas.

1- Proyectil con fricción: Una partícula de masa m es lanzada al aire con un ángulo α con respecto a la horizontal (ver figura), como consecuencia de la gravedad y del aire la dinámica de este proyectil es descrita por

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{y} - \lambda\vec{v},$$

g da cuenta de la gravedad, $\hat{y}$ vector unitario vertical y λ es el coeficiente de amortiguamiento el cual da cuenta del roce del proyectil con el aire ($[\lambda] = kgr \times seg^{-1}$). El término $-\lambda\vec{v}$ da cuenta de la fuerza de roce.

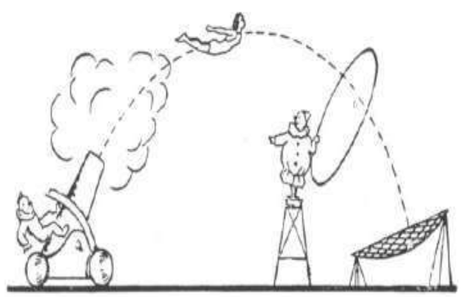


FIG. 1. proyectil con roce.

1-a) Encuentre análiticamente la trayectoria del proyectil.

1-b) ¿ Cómo se compara cualitativamente esta trayectoria con la de un proyectil sin roce ($\lambda = 0$)?

2- Primera correción al problema de la manzana de Newton: Newton para describir en forma más aproximada la caída de un cuerpo en la superficie de la tierra debe tomar en cuenta la curvatura de la tierra. Para esto, considere que la fuerza que siente un objeto de masa m en la superficie de la tierra es

$$\vec{F} = -G\frac{mM_t}{r^2}\hat{r},$$

donde M_t es la masa de la tierra, r distancia del centro de la Tierra al objeto, G constante de gravitación universal y $\hat{r}$ vector unitario normal a la superficie de la tierra.

Considere que un objeto es lanzado en la superficie de la Tierra a una altura h con una condición inicial arbitraria ($h \ll R_t$, R_t radio de la Tierra), por medio de usar un sistema de coordenadas cartesianas en la superficie de la Tierra, encuentre las ecuaciones de movimiento debido a las correcciones de la curvatura de la Tierra–primeras correcciones a las ecuaciones de movimiento–en particular como se comporta en la dirección horizontal.

2-a) Una vez establecidas las ecuaciones de movimiento, encuentre la solución análitica.

3- Péndulo esférico: Considere un péndulo ideal formado por una masa m puntual y una cuerda ideal de largo l. La masa puntual se puede desplazar sobre una superficie esférica (ver figura)

3-a) Usando coordenadas esféricas encuentre la ecuación de movimiento del péndulo en función de la gravedad

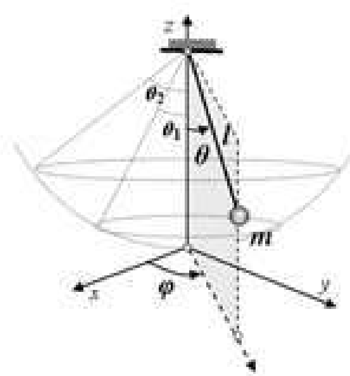


FIG. 2. Péndulo esférico.

Control II
Mecánica FI2001-2012-01

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Yair Zárate
Tiempo 3 horas.

1- Trabajo del péndulo con disipación: considere un péndulo plano de largo l y masa m, con disipación humeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ.

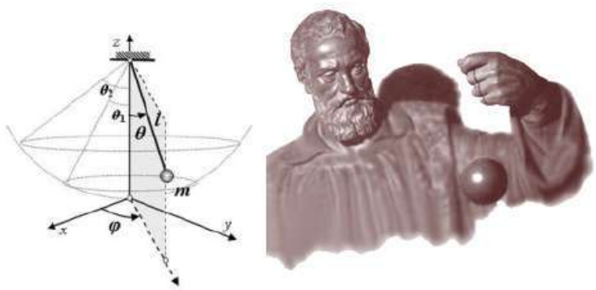


FIG. 1. Galileo: mmmm..........

1-a) Encuentre el trabajo que realiza el péndulo cuando se suelta de un pequeño ángulo hasta que llega por primera vez a la posición vertical.

1-b) En el caso que la disipación húmeda es remplazada por una hidrodinámica ¿ como cambia su resultado?

2- Anillo bailarín: Considere un anillo de radio R y densidad de masa lineal uniforme λ. Si sobre el eje de simetría del anillo se deposita a una distancia cercana una partícula puntual de masa m, la atracción gravitacional desplazará la partícula sobre este eje de simetría (ver figura)

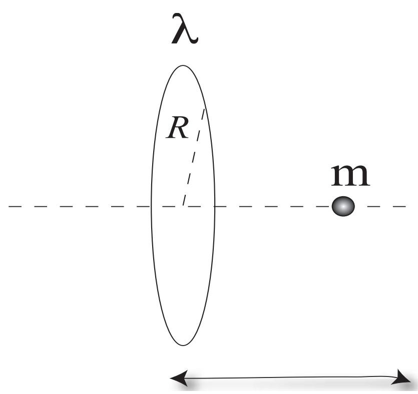


FIG. 2. Anillo bailarín.

Encuentre la frecuencia de oscilación del anillo entorno a la partícula.

3- Problema de dos cuerpos de Hooke: Considere dos partículas puntuales de masa m_1 y m_2, respectivamente, unidas por un resorte ideal de constante elástica k y largo natural cero (ver figura)

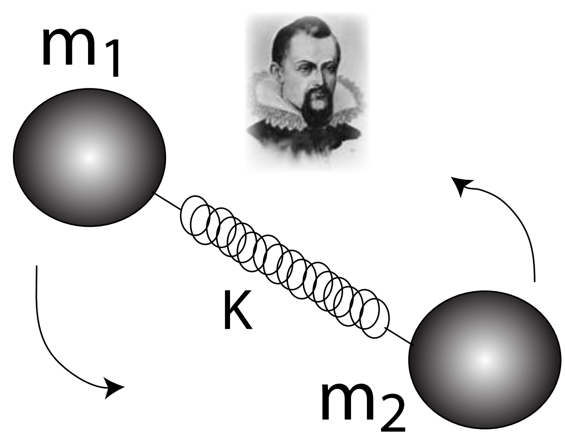


FIG. 3. Problema de dos cuerpos de Hooke.

Dado una condición arbitraria de las partículas:

3-a) Encuentre el potencial efectivo que caracteriza la dinámica entre las partículas, justifique claramente sus argumentos.

3-b) Muestre que el sistema satisface la segunda ley de Keppler.

3-c) Determine el radio de la orbita circular y con que frecuencia oscila en la dirección radial, cuando esta es perturbada, en función de los parámetros que caracterizan al sistema.

Examen
Mecánica FI2001-2012-01

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Yair Zárate
Tiempo 3 horas.

I. PARTÍCULA EN UNA CANAL

Una partícula puntual de masa m bajo la influencia del campo gravitacional se desliza sobre un canal horizontal de sección vertical elíptica de semi ejes a y b, respectivamente, como se ilustra en la figura 1.

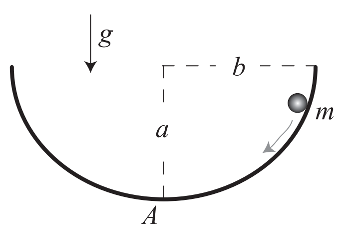


FIG. 1. ¿ oscila?

1-a) Encuentre la ecuación de movimiento de la partícula.

1-b) Encuentre la frecuencia de oscilación en torno al punto mínimo del canal (punto A de la figura), para pequeñas perturbaciones.

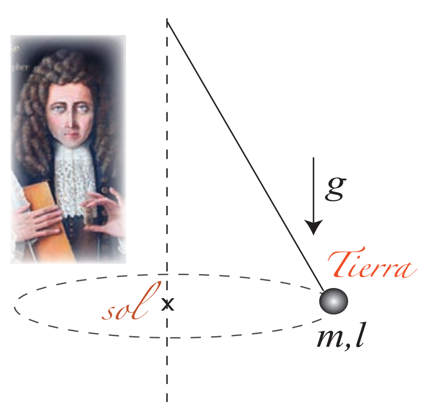


FIG. 2. Hooke: podemos experimentar con la dinámica de los cuerpos celestes.

II. SEGUNDA LEY DE KEPLER

R. Hooke con el intento de explicar que la segunda ley de Kepler era una consecuencia natural de las fuerzas centrales entre dos cuerpos, ilustra a la sociedad científica del Reino Unido—*Royal society*—que esta propiedad se puede obtener considerando la dinámica de un péndulo esférico de masa puntual m y largo natural l, donde la masa del péndulo daría cuenta de un cuerpo celeste y el otro esta dado por la intersección de la vertical del péndulo y el plano donde se mueve el péndulo (ver figura 2).

Muestre que en esta representación de cuerpos celestes es valida la segunda ley de Kepler, justifique claramente sus argumentos.

III. PÉNDULO DE ANDRONOV-LORENTZ

Considere una partícula puntual de masa m y carga eléctrica q, la cual puede deslizar sin fricción sobre un aro ideal de radio R y momento de inercia despreciable, como se ilustra en la figura 3.

Si sobre este péndulo se aplica un un campo magnético vertical $\vec{B} = B\hat{k}$ ($\hat{k}$ vector anti paralelo a la gravedad), el anillo sentirá el efecto de la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula.

3-a) Encuentre la ecuación de movimiento de esta partícula en coordenadas esféricas.

3-b) En caso de aumentar la intensidad del campo magnético, ¿cuál es el equilibrio relativo que caracteriza al sistema?

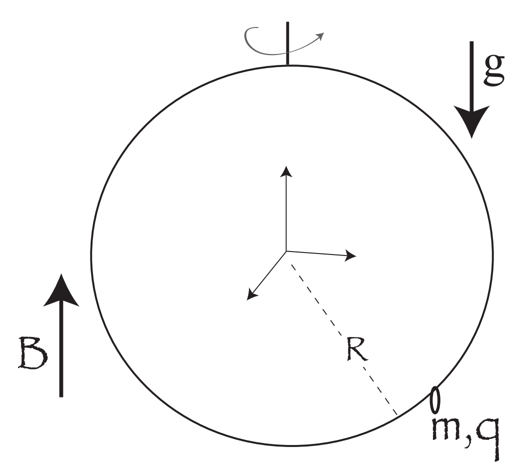


FIG. 3. Péndulo de Andronov-Lorentz.

EJERCICIO 8
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Trabajo del péndulo con disipación: considere un péndulo plano de largo l y masa m, con disipación humeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ.

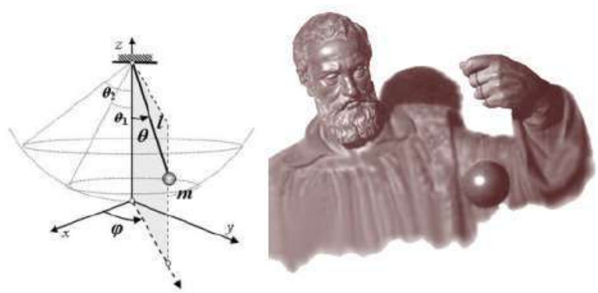


FIGURE 1. Galileo: mmmm..........

Encuentre el trabajo que realiza el péndulo cuando se suelta de un pequeño ángulo hasta que llega por primera vez a la posición vertical.

Dificultad 3.0 .

EJERCICIO 8
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Trabajo del péndulo con disipación: considere un péndulo plano de largo l y masa m, con disipación humeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ.

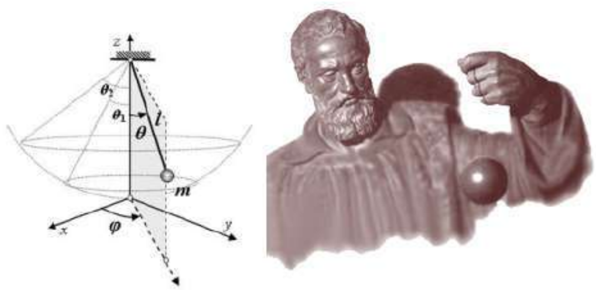


FIGURE 1. Galileo: mmmm..........

Encuentre el trabajo que realiza el péndulo cuando se suelta de un pequeño ángulo hasta que llega por primera vez a la posición vertical.

Dificultad 3.0 .

EJERCICIO 8
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Péndulo con disipación hidrodinámica: considere un péndulo esférico de largo l y masa m. El efecto del aire sobre el péndulo es modelada por una fuerza de roce hidrodinámica.

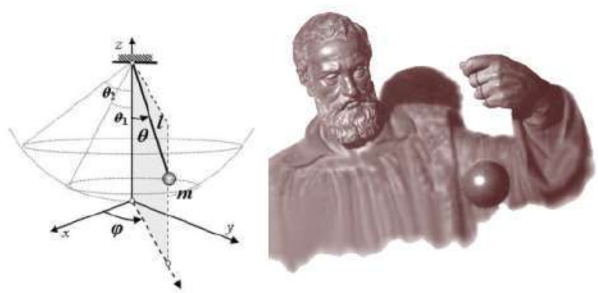


FIGURE 1. Galileo: mmmm..........

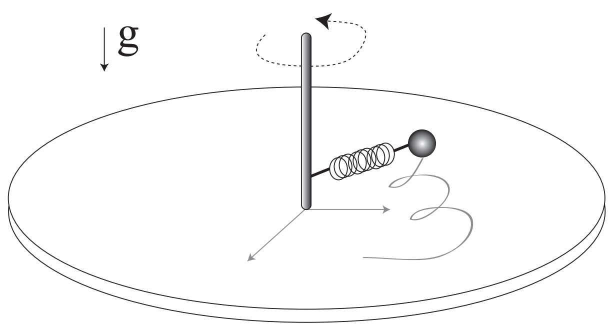
Encuentre la ecuación de movimiento del péndulo en coordenadas esféricas.

Dificultad 1.5 .

EJERCICIO 7
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Cuerpo celeste sobre la mesa con disipación: Una partícula de masa m se puede mover bajo la influencia de la fuerza de fricción viscosa F_r sobre una mesa recubierta con un lubricamiento. Considere un resorte ideal de largo natural $l_0 = 0$ y constante elástica k, el cual en un extremo es fijado al centro de una mesa y en el otro extremo se une a la partícula, como se ilustra en la figura.



Sea $r(t)$ la distancia entre la partícula y el centro de una mesa en un instante t dado. Si la fuerza de fricción es de tipo roce húmedo encuentre la trayectoria que satisface la partícula dada una condición inicial arbitraria. En el caso que la fricción sea de tipo hidrodinámica como se modifica cualitativamente su resultado.

Dificultad 3.0 .

EJERCICIO 6
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Cuerpo celeste macroscopico: La Tierra es un cuerpo macroscópico esférico de radio R_o constituido por un gran número de constituyentes. Para dar cuenta de estos constituyentes uno puede caracterizar la densidad de masa por la función $\rho(r)$, donde r es la coordenada radial medida desde el centro de la Tierra.

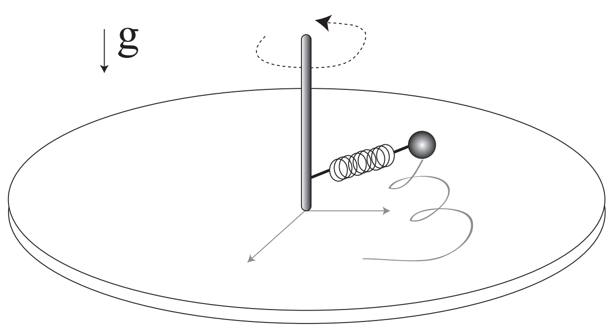
Si se considera un partícula puntual de masa m a una distancia $R > R_0$ desde el centro de la Tierra. Encuentre la fuerza entre la Tierra y la partícula cuando la densidad es $\rho(r) = \rho_o$ constante y para el caso que la densidad es $\rho(r) = \rho_o - r$. En estos casos que tipo de orbitas espera encontrar entre la tierra y la partícula.

Dificultad 2.5 .

EJERCICIO 5
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Cuerpo celeste sobre la mesa: Una partícula de masa m se puede mover sin fricción sobre una mesa. Considere un resorte ideal de largo natural $l_0 = 0$ y constante elástica k, el cual en un extremo es fijado al centro de una mesa y en el otro extremo se une a la partícula, como se ilustra en la figura.



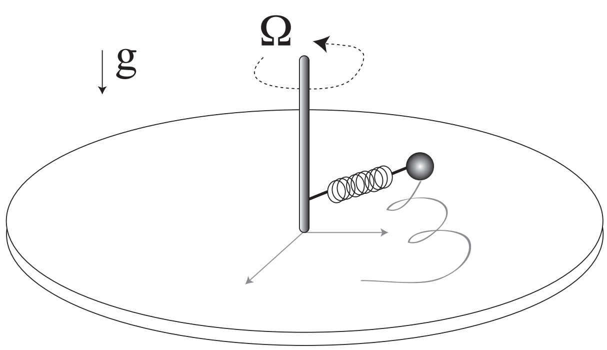
Sea $r(t)$ la distancia entre la partícula y el centro de una mesa en un instante t dado. Encuentre el potencial efectivo que describe la dinámica de esta cantidad física e interprete el tipo de orbitas que exhibe esta partícula para las diferentes condiciones iniciales.

Dificultad 2.5 .

EJERCICIO 4
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Cuerpo celeste sobre la mesa: Una partícula de masa m se puede mover sin fricción sobre una mesa. Considere un resorte ideal de largo natural $l_0 = 0$ y constante elástica k, el cual en un extremo es fijado al centro de una mesa y en el otro extremo se une a la partícula, como se ilustra en la figura.



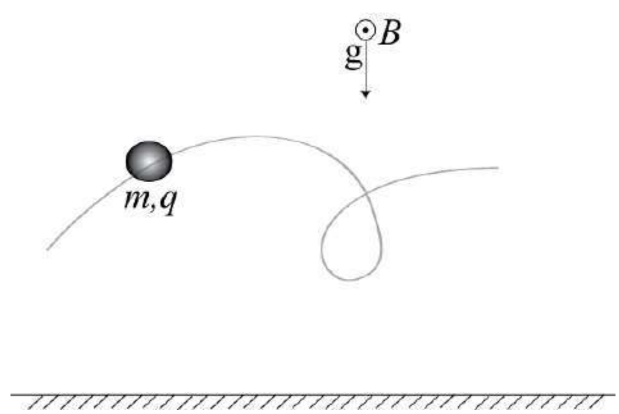
Sea $r(t)$ la distancia entre la partícula y el centro de una mesa en un instante t dado. Encuentre el potencial efectivo que describe la dinámica de esta cantidad física e interprete el tipo de orbitas que exhibe esta partícula para las diferentes condiciones iniciales.

Dificultad 2.5 .

EJERCICIO 3
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Considere una partícula puntual de masa m y carga q, la cual esta bajo la influencia del campo gravitacional constante en la superficie de la tierra caracterizado por $\vec{g} = -g\hat{k}$ ($\hat{k}$ da cuenta de la dirección vertical). Si la partícula, además, esta bajo la influencia de de un campo magnético constante en la dirección horizontal ($\vec{B} = B\hat{x}$).



1.- Encuentre las ecuaciones de movimiento de esta partícula.
2.- Caracterice la trayectoria y velocidad que satisface esta partícula.
3.- Determine el vector tangencial y el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula.

Dificultad 4.5 .

EJERCICIO 2
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Resorte físico: Considere un resorte el cual se puede deformar en la dirección horizontal (ver figura). Para pequeñas deformaciones la fuerza del resorte toma la forma

$$\vec{F} = -kx\hat{x},$$

donde k es la constante elástica del resorte, x describe el desplazamiento con respecto al largo natural y $\hat{x}$ es el vector unitario en la dirección horizontal. Sin embargo, para grandes deformaciones del resorte la fuerza adquiere la siguiente forma

$$\vec{F} = -(k + x^2)x\hat{x}.$$

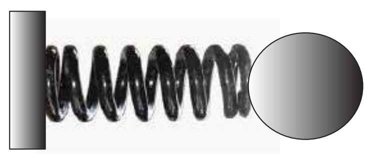


FIGURE 1. Resorte físico

1.- Para pequeñas deformaciones caracterice la dinámica del resorte por medio de encontrar sus soluciones y caracterizar geométricamente su espacio de fase.

2.- Para grandes deformaciones encuentre la solución en su forma integral y describa como se modifica el espacio de fase.

Dificultad 4.0 .

EJERCICIO 1
MECÁNICA FI2001-2012-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: YAIR ZÁRATE
TIEMPO 60 MINUTOS.

Primera correción al problema de la manzana de Newton : Newton para describir en forma más aproximada la caída de un cuerpo en la superficie de la tierra debe tomar en cuenta la curvatura de la tierra. Para esto, considere que la fuerza que siente un objeto de masa m en la superficie de la tierra es

$$\vec{F} = -G\frac{mM_t}{r^2}\hat{r},$$

donde M_t es la masa de la tierra, r distancia del centro de la Tierra al objeto, G constante de gravitación universal y $\hat{r}$ vector unitario normal a la superficie de la tierra.

Considere que un objeto es lanzado en la superficie de la Tierra a una altura h con una condición inicial arbitraria ($h \ll R_t$, R_t radio de la Tierra), por medio de usar un sistema de <u>coordenadas cartesianas</u> en la superficie de la Tierra, encuentre las ecuaciones de movimiento debido a las correcciones de la curvatura de la Tierra–primeras correcciones a las ecuaciones de movimiento–en particular como se comporta en la dirección horizontal.

Una vez establecidas las ecuaciones de movimiento, encuentre la solución análitica.

FIGURE 1. mmmm..........

Dificultad 5.0 .

Examen Recuperativo
Mecánica FI2001-2013-01

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliares: Milko Estrada y Alexis Yáñez

Todos sus argumentos deben estar claramente justificados, en caso contrario no serán tomados en cuenta. Tiempo 3 horas.

1- Universo de Kepler-Newton: considere dos partículas puntuales de masa m_1 y m_2, respectivamente. La fuerza de gravitacional universal tiene la forma

$$\vec{F}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r},$$

donde r da cuenta de la distancia entre las partículas, y G constante de gravitración universal.

FIG. 1. Universo de Kepler-Newton.

1-a) Muestre que las órbitas que describen la dinámica de este problema, para diferentes energías son cónicas.

1-b) Explique las leyes de Kepler a partir de sus resultados analíticos.

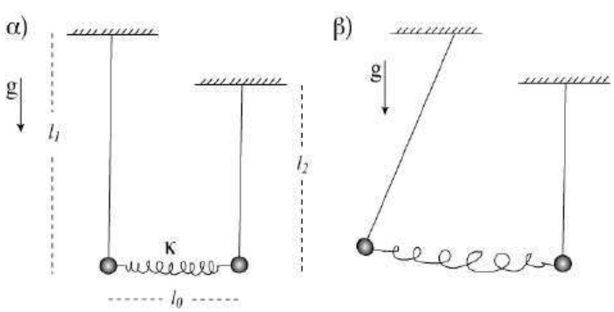


FIG. 2. Péndulos acoplados.

2- Vibraciones coherentes: Considere dos péndulos ideales de largos l_1 y l_2 ($l_1 > l_2$) con masa masa m_1 y m_2, respectivamente. Los extremos fijos de los péndulos son tales que la diferencia vertical entre ambos es $l_1 - l_2$ y la diferencia horizontal es l_0 (ver figura). Por lo tanto, cuando ambos están verticales sus extremos están a la misma altura (ver figura).

Si ambos péndulos se conectan en sus extremos libres por un resorte ideal (masa despreciable), constante elástica κ y largo natural l_0.

2-a) Encuentre la ecuación de movimiento que describe este sistema.

2-b) Encuentre su respectivo equilibrio estable y caracterice las pequeñas oscilaciones que exhibe este sistema.

3- Resorte no inercial: considere un torna mesa de radio suficientemente grande y muy bien pulido (roce despreciable), el cual gira a la velocidad angular $\vec{\omega}$ con respecto al eje $\vec{A}$ paralelo a la dirección del peso. Si un resorte ideal de largo natural l_o y constante elástica K, se fija en el eje $\vec{A}$ y en el otro extremo esta conectado a una masa puntual de masa m.

FIG. 3. Resorte no inercial.

3-a) Encuentre las ecuaciones de movimientos que describen el resorte en el sistema del toca disco.

3-b) Encuentre el equilibrio de este sistema y caracterice su estabilidad con respecto a la a velocidad angular $\vec{\omega}$.

EJERCICIO 8
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 60 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Periodo de una órbita elíptica: Considere dos cuerpos celestes, de masa m_1 y m_2, respectivamente. Desde un cuerpo celeste el otro realiza una órbita elíptica, como se ilustra en la figura.

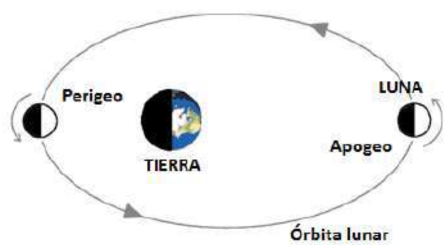


Figure 1. Órbita elíptica

Determine el periodo de la órbita elíptica en función de la energía.

Dificultad 5.0 .

EJERCICIO 7
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 60 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Ley de Kepler en una molécula dipolar: Un modelo idealizado de una molécula dipolar es considerar que esta se compone por dos masas puntuales de valor m y conectadas en la dirección entre las partículas (fuerza central) por un resorte sin largo natural y constante elástica k, como se muestra en la figura.

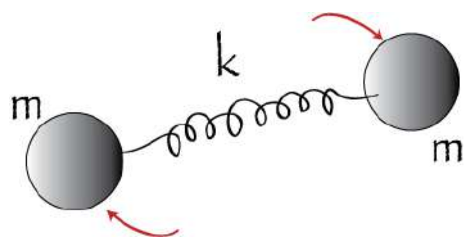


FIGURE 1. representación esquemática de una molécula dipolar

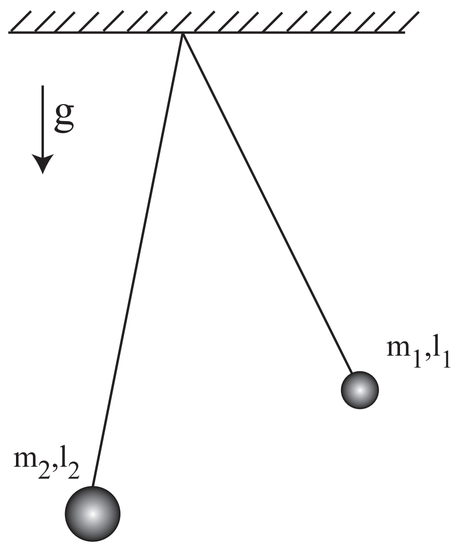
Desprecie los efectos de la gravedad y muestre que este sistema satisface la segunda ley de kepler.

Dificultad 4.0 .

EJERCICIO 6
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 60 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Centro de masa: Considere dos péndulos ideales de masas $\{m_1, m_2\}$ y largos $\{l_1, l_2\}$, los cuales comparten el mismo punto de soporte, como se ilustra en la figura.



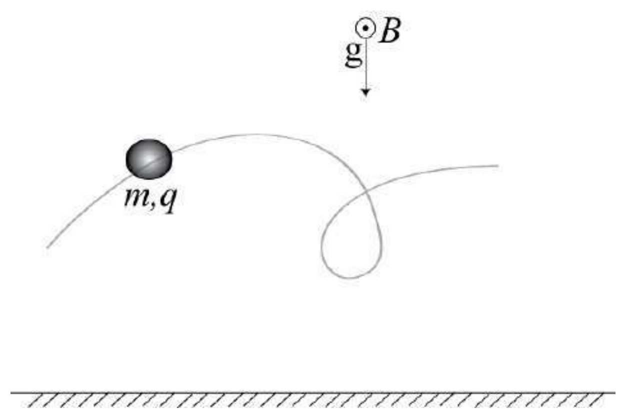
1.- Encuentre la ecuación de movimiento del centro de masa de este sistema.

Dificultad 5.0 .

EJERCICIO 5
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Coordenadas intrinsicas: Considere una partícula puntual de masa m y carga q, la cual esta bajo la influencia del campo gravitacional constante en la superficie de la tierra caracterizado por $\vec{g} = -g\hat{k}$ ($\hat{k}$ da cuenta de la dirección vertical). Si la partícula, además, esta bajo la influencia de de un campo magnético constante en la dirección horizontal ($\vec{B} = B\hat{x}$).



1.- Encuentre las ecuaciones de movimiento de esta partícula.
2.- Caracterice la trayectoria y velocidad que satisface esta partícula.
3.- Determine el vector tangencial, el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula y vector normal a la circunferencia circunscrita instantáneamente.

Dificultad 3.0 .

EJERCICIO 4
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Oscillator No lineal: Robert Hooke, con el objetivo de explicar la fuerza de restauración de un resorte físico para grandes deformaciones propone la siguiente fuerza $\vec{F} = -k(x-x_0)+\alpha(x-x_0)^3$, donde k es la constante elástica con dimensiones de kg/s^2, x_0 largo natural y α constante elástica no lineal con dimensiones de kg/s^2m^2. En le figura se representa el sistema en estudio.

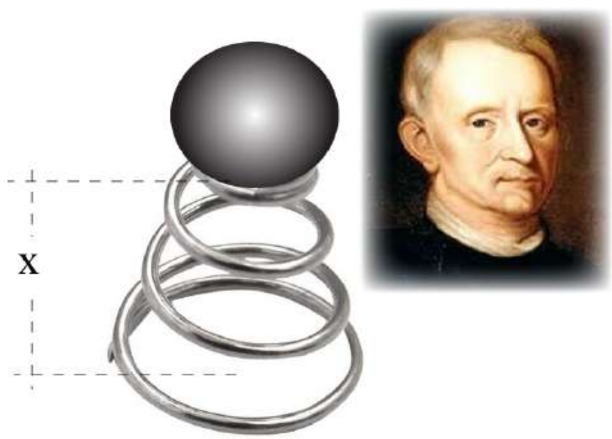


FIGURE 1. Resorte no lineal, Hooke???

En caso de considerar una masa m adherida al resorte y solo considerar deformaciones longitudinales, el sistema físico se describe por la ecuación

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0) + \alpha(x-x_0)^3;$$

Muestre que las soluciones de este sistema se describen en términos de funciones elípticas para ciertas relaciones entre los parámetros.

$$f(\phi|k) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 sin^2(\phi)}}.$$

Dificultad 3.0 .

EJERCICIO 3
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Péndulo de Andronov: considere una anillo de masa m el cual se desplaza sin fricción sobre un aro vertical de radio R y masa despreciable, bajo la influencia de la gravedad. Si en aro gira con velocidad angular constante Ω (ver figura)

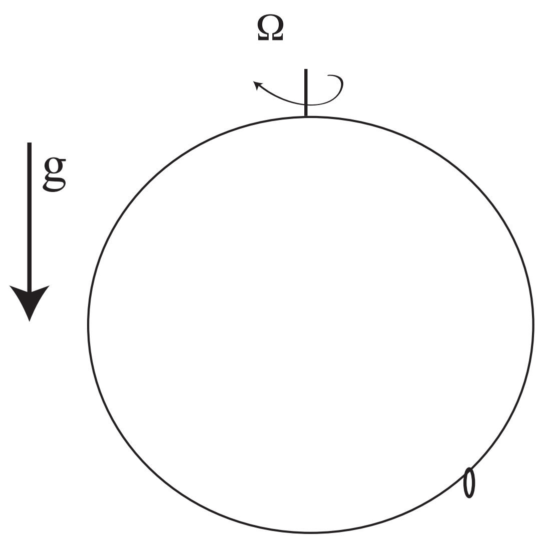


FIGURE 1. Péndulo de Andronov

Encuentre la ecuación que caracteriza este sistema en coordenadas adecuadas y encuentre la posición de equilibrio de este sistema.

Dificultad 3.5 .

EJERCICIO 2
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Péndulo físico: considere una partícula de masa m unida con una cuerda de largo natural l_0 a un punto fijo A, bajo la influencia de la gravedad como lo ilustra la figura.

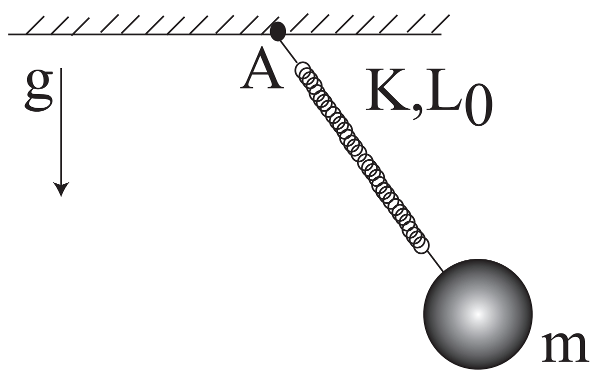


Figure 1. Péndulo físico

Con el objetivo de dar cuenta de una cuerda más realista, modele esta por una un resorte la largo natural l_0 y constante elástica K. Usando coordenadas polares encuentre la ecuación de movimiento de este péndulo.

Encuentre la posición de equilibrio de este sistema, es decir, la posición del péndulo donde la fuerza total sobre la partícula es cero.

Dificultad 4.0 .

EJERCICIO 1
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: GUSTAVO ESTAY & MAXIMILIANO SALINGER B.
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Trayectoria y espacio de fase : Considere un cuerpo celeste, de tamaño similar a la tierra, el cual esta perdiendo lentamente su masa linealmente con el tiempo por un orificio en su superficie a una tasa temporal κ kg/s–*planeta globo.* En algún lugar del planeta un alienígena, de tamaño similar a un humano contemporáneo, deja caer una manzana de masas m del reposo, describiendo una trayectoria vertical.

Figure 1. Problema de Ghalileouss

- Modele la ecuación que debe satisfacer esta manzana. INDICACIÓN: la ley de atracción gravitacional de dos cuerpos es

$$\vec{F} = -G\frac{mM_t}{r^2}\hat{r},$$

donde F es la fuerza, m y M masas de los objetos, r y $\hat{r}$ la distancia y vector unitario entre los objetos.
- Encuentre, dibuje el respectivo espacio de fase que describe la dinámica de la manzana.

Dificultad 4.5 .

Control II
Mecánica FI2001-2013-01

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliares: Gustavo Estay & Maximiliano Salinger B.

Todos sus argumentos deben estar claramente justificados, en caso contrario no serán tomados en cuenta. Tiempo 3 horas.

1- Problema de dos cuerpos no-kleperianos: considere dos partículas puntuales de masa m_1 y m_2, respectivamente. En el caso que la fuerza gravitacional entre las partículas tuviese un potencial central de la forma (potencial no-kleperiano)

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^4},$$

donde r da cuenta de la distancia entre las partículas y κ es una constante de dimensiones $kgr\ m^6/s^2$, la cual da cuenta de la intensidad de la interacción no-kleperiana.

FIG. 1. Planetas no-kleperianos.

1-a) Encuentre las ecuaciones de movimiento que describen en forma minimal la dinámica de este sistema.

1-b) Describa en forma cualitativa la dinámica exhibida por este sistema.

1-c) Proponga las leyes de generalizadas kepler que describirían este sistema.

2- Lanzamiento de de proyectil en el límite hidrodinámico: Considere un proyectil que es lanzado a grandes velocidades en la superficie de la Tierra. Para dar cuenta de la dinámica de este proyectil considere que éste se puede modelar como una partícula puntual de masa m, que la trayectoria que describe es pequeña comparada con el radio de la Tierra y que la fuerza ejercida por el aire sobre el proyectil es modelada por la fricción hidrodinámica, es decir, la fuerza de oposición tiene la forma

$$\vec{F}_{Hidro} = -\alpha \vec{v}^2,$$

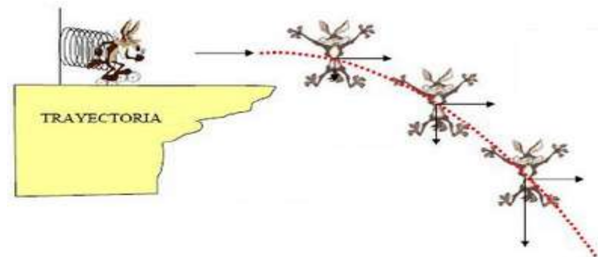


FIG. 2. Lanzamiento de de proyectil en el límite hidrodinámico.

donde α es una constante de amortiguamiento de dimensiones kgr/m, $\vec{v}$ es el vector velocidad.

2-a) Encuentre la ecuación de movimiento que describe este sistema y resuelva las ecuaciones para la velocidad.

2-b) Encuentre el lugar geométrico que satisface las componentes de la velocidad e interprete su resultado.

3- Trabajo del péndulo con disipación: considere un péndulo plano de largo l y masa m, con disipación humeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ.

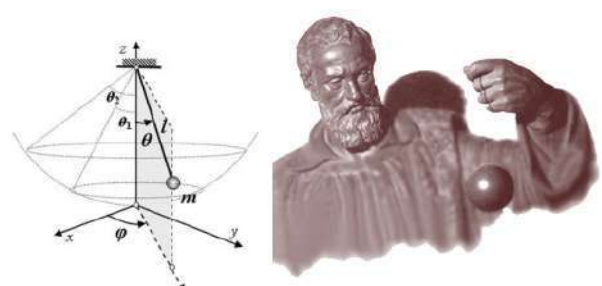


FIG. 3. Galileo: mmmm..........

3-a) Encuentre el trabajo que realiza el péndulo cuando se suelta de un pequeño ángulo hasta que llega por primera vez a la posición vertical

Control I
Mecánica FI2001-2013-01

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliares: Gustavo Estay & Maximiliano Salinger B.

Todos sus argumentos deben estar claramente justificados, en caso contrario no serán tomados en cuenta. Tiempo 3 horas.

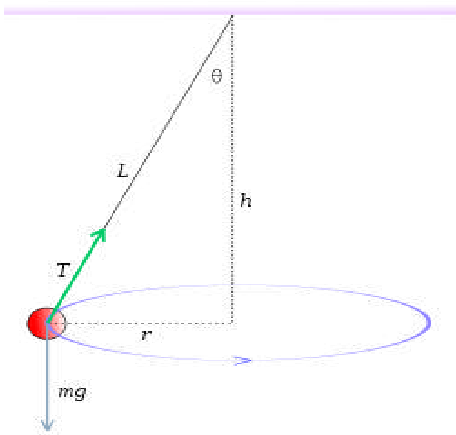


FIG. 1. Péndulo esférico.

1- Péndulo esférico: Considere un péndulo ideal, formado por una cuerda de largo L y una masa puntual m, un extremo de la cuerda se fija en el punto de apoyo O y en el otro extremo está fijada la masa puntual. Éste sistema esta bajo la influencia del campo gravitatorio constante g, como se muestra en la figura.

1-a) Utilizando coordenadas esféricas deduzca la ecuación de este sistema.

1-b) En el caso que el péndulo es soltado del reposo, encuentre las soluciones que describen este sistema.

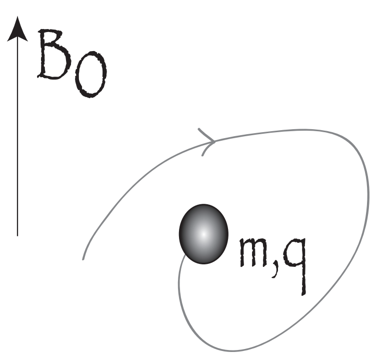


FIG. 2. Partícula magnética con disipación.

2- Partícula magnética con disipación: Considere una partícula de masa m y carga eléctrica q, la cual esta bajo la influencia del campo magnético vertical constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$, por lo tanto la partícula está bajo la influencia de la fuerza de Lorenz $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula. Si la partícula esta rodeada de muchas partículas neutras de masas despreciables, las cuales son responsable de generar una fuerza de disipación de la forma $\vec{F}_{dis} = -\lambda\vec{v}$.

2-a) Encuentre la trayectoria que describe el movimiento de la partícula, cuando la condición inicial para la velocidad se encuentra en el plano ortogonal al campo magnético.

2-b) Determine el vector tangente $\hat{t}$ y el radio de curvatura de la trayectoria de esta partícula.

3- Fuerza de Coriolis ecuatorial: Considere una partícula de masa m en la superficie de la tierra, la cual es soltada desde el reposo a una altura h de la superficie de la tierra. Debido a la rotación de la tierra $\vec{\omega}$, sobre la partícula se ejerce una fuerza efectiva de la forma $\vec{F} = -m(\vec{v} \times \vec{\omega})$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula. Por simplicidad considere que la partícula esta en la zona ecuatorial, donde la velocidad ángular de la tierra es paralela a la superficie apuntando, hacia el Norte, como se ilustra en la figura el cual está en el plano Oeste-Este paralelo a la dirección de la gravedad, por lo tanto $\vec{\omega}$ es ortogonal a este plano.

3-a) Si el movimiento de la partícula es estudiada en el plano Oeste-Este paralelo a la dirección de la gravedad, describa el lugar geométrico que describe la partícula para tiempos iniciales (**INDICACIÓN:** desprecie el movimiento fuera de este plano)

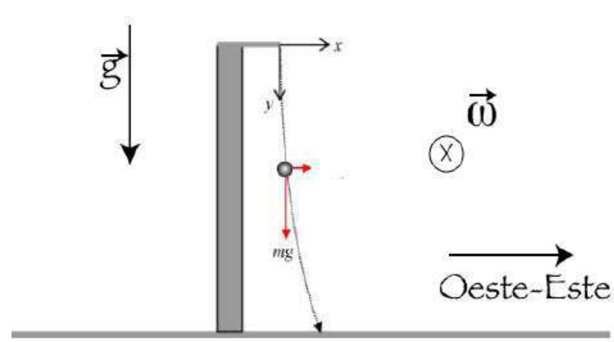


FIG. 3. Partícula ecuatoriana.

Examen
Mecánica FI2001-2014

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliares: Milko Estrada y Alexis Yáñez

Todos sus argumentos deben estar claramente justificados, en caso contrario no serán tomados en cuenta. Tiempo 3 horas.

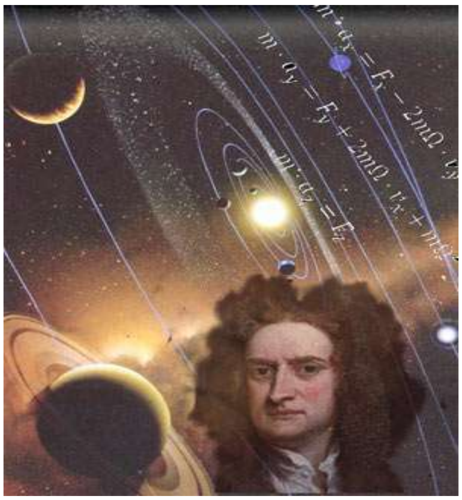


FIG. 1. Universo de Kepler-Newton.

1- Universo de Kepler-Newton: considere dos partículas puntuales de masa m_1 y m_2, respectivamente. La fuerza de gravitacional universal tiene la forma

$$\vec{F}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r},$$

donde r da cuenta de la distancia entre las partículas, y G constante de gravitración universal.

1-a) Muestre que las órbitas que describen la dinámica de este problema, para diferentes energías son cónicas.

1-b) Explique las leyes de Kepler a partir de sus resultados analíticos.

2- Oscilador de Kapitza: Considere un anillo de masa m que se desplaza sin fricción al interior de un aro de radio R, el cual alterna en forma armónica con respecto a la vertical y frecuencia ω, bajo la influencia del campo gravitatorio (ver figura 2).

2-a) Encuentre la ecuación de movimiento que describe este sistema.

2-b) En el límite de alta frecuencia $\omega \to \infty$, encuentre la ecuación efectiva que describe este sistema y la frecuencia natural que da cuenta las pequeñas oscilaciones entorno al equilibrio vertical.

3- Resonancia: Considere una masa m, la cual se puede desplazar vertical sobre un fluido con coeficiente de

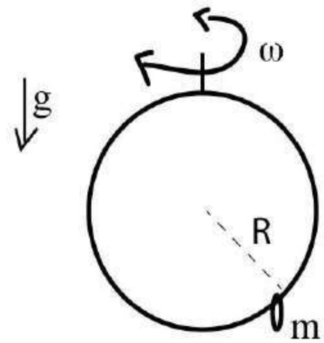


FIG. 2. Oscilador de Kapitza.

amortiguamiento λ, un extremo de la partícula es conectado a un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0, el otro extremo es estirado periódicamente por medio de un sistema de engranaje generando una amplitud a y frecuencia ω

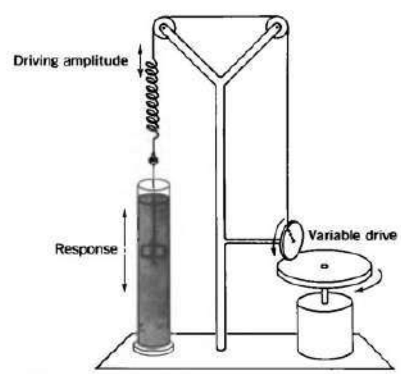


FIG. 3. Partícula resonante.

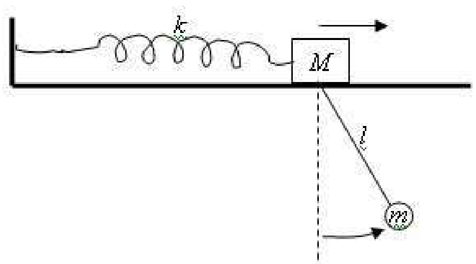
3-a) Modelo y encuentre las ecuaciones de movimientos que describen el sistema.

3-b) Encuentre la curva de resonancia que caracteriza este sistema, es decir, la curva de respuesta como función de la frecuencia de forzamiento.

EJERCICIO 7
MECÁNICA FI2001-2013-01

PROF. MARCEL G. CLERC (ALEJANDRO LEÓN)
AUXILIARES: MILKO ESTRADA Y ALEXIS YÁÑEZ
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Pequeñas oscilaciones: Considere un cuerpo de masa M el cual se puede deslizar sin roce sobre una superficie horizontal, este cuerpo esta atado a un resorte de constante elástica K de largo natural l_0, el otro extremo del resorte esta fijado en una pared. Sobre este cuerpo cuelga un péndulo ideal de largo l y masa m, como se ilustra en la figura.



1.- Determine el equilibrio de este sistema.
2.- Encuentre con que frecuencias oscila este sistema entorno a su equilibrio y determine sus respectivos modos propios.

Dificultad 5.0 .

EJERCICIO 5
MECÁNICA FI2001-2014-06

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: MILKO ESTRADA Y ALEXIS YÁÑEZ
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Barco: Un modelo simple de un barco, *barco ideal*, es considerar que este es un bloque cuadrado de lado a el cual esta flotando en la superficie de un fluido de densidad ρ, bajo la influencia de la fuerza de gravedad y la fuerza de flotación (fuerza que ejerce el fluido sobre el bloque la cual es proporcional al volumen desplazado por la densidad del fluido y la gravedad), ver figura

FIGURE 1. Barco ideal

Si el bloque esta en equilibrio cuando este esta hundido una profundidad h ($h < a$).

5.1 Si se perturba ligeramente el bloque, con que frecuencia este oscila.
5.2 En el caso que el bloque oscile, este emite ondas, generando un amortiguamiento caracterizado por un parmetro λ. En este caso, encuentre la evolución analítica de la evolución del centro de masa.

Dificultad 3.5 .

EJERCICIO 4
MECÁNICA FI2001-2014-06

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: MILKO ESTRADA Y ALEXIS YÁÑEZ
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Péndulo físico: Considere un péndulo físico el cual esta compuesto por un cilindro homogneo de radio ρ, largo L, masa M_c y una semi esfera de radio R y masa M_0, ver figura. El extremo A des péndulo da cuenta del pivote

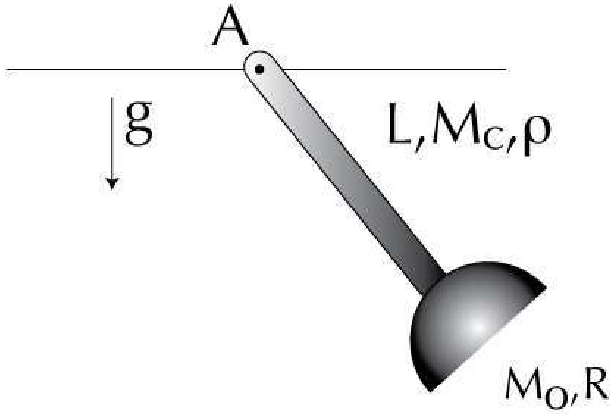


FIGURE 1. Péndulo físico

Encuentre la ecuación de este sistema cuando esta bajo la influencia del campo gravitatorio y describa como son sus soluciones cualitativamente.

Dificultad 3.5 .

EJERCICIO 3
MECÁNICA FI2001-2014-06

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: MILKO ESTRADA Y ALEXIS YÁÑEZ
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Oscillator No lineal: Robert Hooke, con el objetivo de explicar la fuerza de restauración de un resorte físico para grandes deformaciones propone la siguiente fuerza $F = -k(x-x_0)+\alpha(x-x_0)^2$, donde k es la constante elástica con dimensiones de kg/s^2, x_0 largo natural y α constante elástica no lineal con dimensiones de kg/s^2m. En le figura se representa el sistema en estudio.

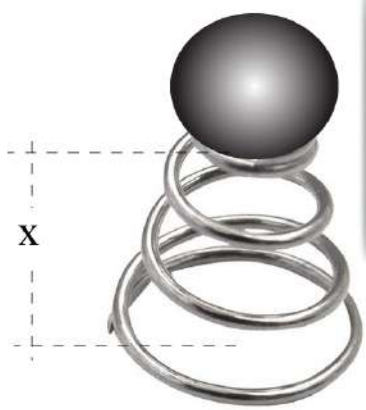


FIGURE 1. Resorte no lineal, Hooke???

En caso de considerar una masa m adherida al resorte y solo considerar deformaciones longitudinales, el sistema físico se describe por la ecuación

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) + \alpha(x - x_0)^2;$$

3-1 Caracterice la energía de este sistema.
3-2 Realice un estudio cualitativo de la dinámica de este sistema y caracterice el espacio de fase.

Dificultad 4.5 .

EJERCICIO 2
MECÁNICA FI2001-2014-06

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: MILKO ESTRADA
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Oscilación de Larmor: Considere una partícula de masa m y carga q, la cual esta bajo la influencia de un campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, el que genera una fuerza sobre la partícula de la forma

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula.

Si considera que la partícula se mueve en el plano XY, el cual es ortogonal al vector $\hat{z}$, encuentre la trayectoria que caracteriza el movimiento de la partícula.

Dificultad 4.5 .

EJERCICIO 1
MECÁNICA FI2001-2014-06

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIARES: MILKO ESTRADA
TIEMPO 50 MINUTOS. TODOS SUS ARGUMENTOS DEBEN ESTAR CLARAMENTE PRECISADOS.

Medio bi-gravitacional: Considere un medio compuesto por dos regiones verticales, denominadas I y II, respectivamente (ver figura). Sobre la region I, la gravedad es vertical, sin embargo sobre la region II la gravedad es oblicua, la cual forma un angulo α con la vertical.

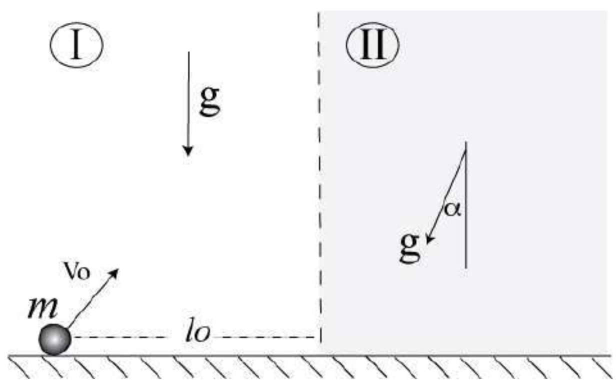


FIGURE 1. Medio bi-gravitacional

Si del medio I se lanza un objeto de masa m con velocidad $\vec{v}_0$ a una distancia l_0 del medio bi-gravitacional. Encuentre la expresión analitica de la trayectoria que describe el objeto.

Dificultad 3.5 .

Control I
Mecánica FI2001-2014

Profesor: Marcel G. Clerc
Milko Estrada y Alexis Yáñez

Todos sus argumentos deben estar claramente justificados, en caso contrario no serán tomados en cuenta. Tiempo 3 horas.

1- Fuerzas central: Considere dos partículas puntuales de masa m_1 y m_2, las cuales tiene una fuerza de atracción central de magnitud constante f_0, como se ilustra en la figura.

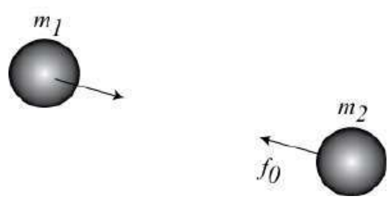


FIG. 1. Iteracción de partículas con fuerza central constante.

Si las partículas están liberadas inicialmente en condiciones iniciales arbitraria

1-a) Muestre que este sistema satisface la segunda ley de Kepler.

1-a) Muestre que este sistematiene una órbita circular y deduzca una relación entre el radio y el periodo (Nueva lII ley de Kepler).

2- Péndulo esférico: Considere un péndulo ideal, formado por una cuerda de largo L y una masa puntual m, un extremo de la cuerda se fija en el punto de apoyo O y en el otro extremo está fijada la masa puntual. Éste sistema esta bajo la influencia del campo gravitatorio constante g, como se muestra en la figura.

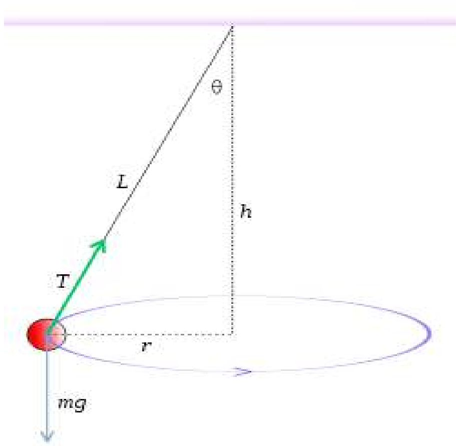


FIG. 2. Péndulo esférico.

2-a) Utilizando coordenadas esféricas deduzca la ecuación del péndulo.

3- Canaleta: Considere una partícula puntual de masa m, la cual se desplaza bajo la influencia del campo gravitatorio sin roce por una canaleta horizontal de sección transversal semicircular de radio R (ver figura).

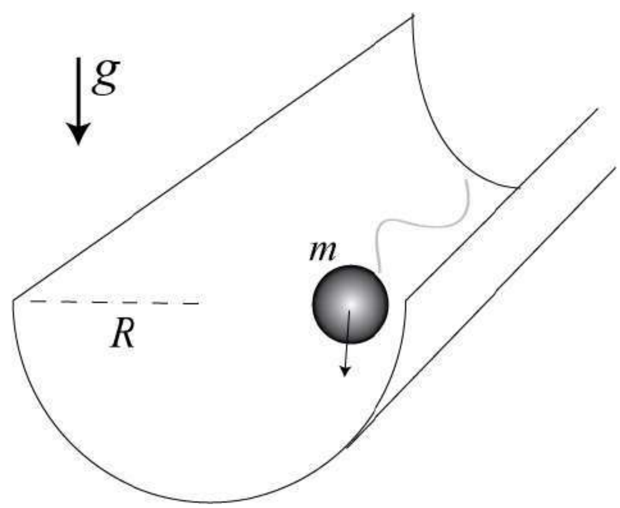


FIG. 3. Partícula en una canaleta.

Dada una condición inicial arbitraria

3-a) Utilizando coordenadas cilíndricas deduzca la ecuación de movimiento de esta partícula.

3-a) Encuentre soluciones analíticas para movimiento de la partícula cerca del mínimo de la canaleta.

INDICACIÓN: Considere que hay una fuerza de Normal.

EJERCICIO VOLUNTARIO 01
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 30 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Espacio de fase de oscilador giratorio: Considere un oscilador no lineal de masa puntual m y constante elástica k, el cual esta sobre una torna mesa que gira a velocidad angular ω (disco giratorio), ver figura, como resultado de la rotación la ecuación que describe el resorte es

$$m\ddot{x} = (l\omega^2 - k)x - \alpha x^3, \tag{0.1}$$

donde $x(t)$ da cuenta del desplazamiento del resorte con respecto a su largo natural, k es constante elástica, l es una longitud característica y α constante dimensional positiva.

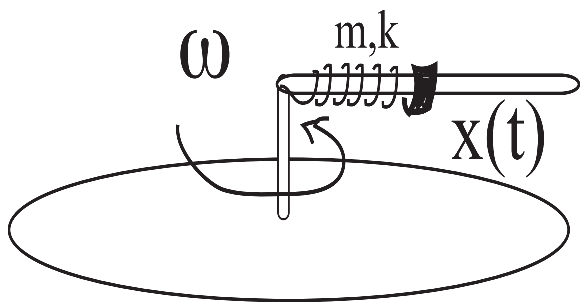


FIGURE 1. Representación esquemática de oscilador giratorio.

En el caso que se cumple la relación $l\omega^2 > k$, caracterice cualitativamente la dinámica del oscilador utilizando el el espacio de fase.

Dificultad 4.5.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

EJERCICIO IRRENUNCIABLE 02
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 30 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Coordenadas para problema de tres cuerpos : Un problema fundamental de la mecánica es el problema de tres cuerpos de masa m_1, m_2, y m, el cual esta motivado por la dinámica del Sol, Tierra y Luna. Una simplificación de este problema considera que dos cuerpos están en los focos de una elipse separados de una distancia constante a del centro como se ilustra en la figura 1. Para dar cuenta de la dinámica del cuerpo m se introduce el siguiente sistema de coordenadas elípticas $\{\mu, \nu\}$ que se relacionan con las coordenadas cartesianas

$$x = a \cosh \mu \cos \nu$$
$$y = a \sinh \mu \sin \nu$$

donde $\mu \geqslant 0$ y ν un ángulo definido en el rango $[0, 2\pi]$.

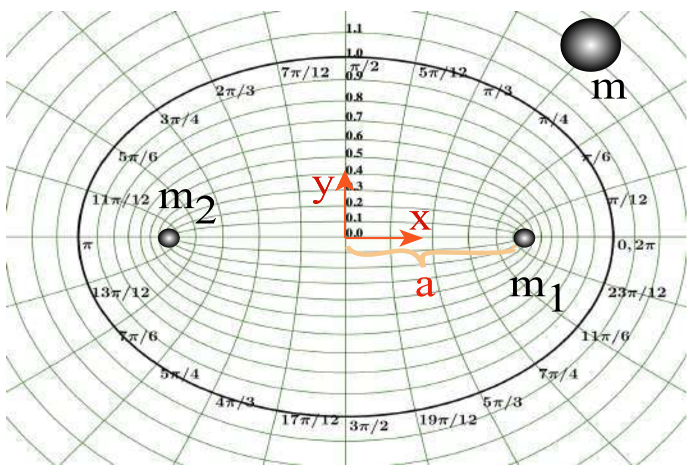


FIGURE 1. Sistema de coordenadas para problemas de tres cuerpos restringidos.

Determine los vectores de base de coordenadas elípticas $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$, represéntelos graficamente y escriba el vector posición $\vec{R}$.

Dificultad 4.0.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

EJERCICIO VOLUNTARIO 03
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 30 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Radio de curvatura de un proyectil : Una partícula de masa m es lanzada al aire con un ángulo α con respecto a la horizontal (ver figura), como consecuencia de la gravedad y del aire la dinámica de este proyectil es descrita por la ecuación de Newton

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{y} - \lambda\vec{v},$$

donde g da cuenta de la gravedad, $\hat{y}$ vector unitario vertical y λ es el coeficiente de amortiguamiento el cual da cuenta del roce del proyectil con el aire ($[\lambda] = kgr \times seg^{-1}$). El término $-\lambda\vec{v}$ da cuenta de la fuerza de roce.

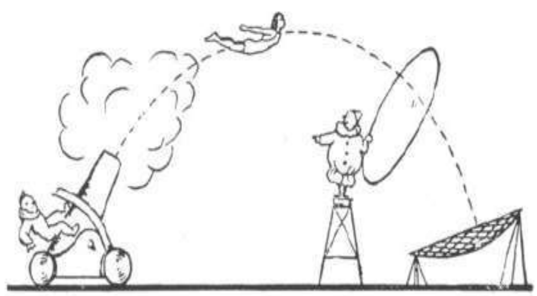


FIGURE 1. proyectil con roce.

1-a) Encuentre análiticamente la trayectoria del proyectil.
1-b) ¿ calcule el radio de curvatura $R(t)$ de la trayectoria del proyectil?

Dificultad 4.0.

EJERCICIO VOLUNTARIO 04
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 30 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Radio de curvatura de un proyectil : Una partícula de masa m es lanzada al aire con un ángulo α con respecto a la horizontal (ver figura), como consecuencia de la gravedad y del aire la dinámica de este proyectil es descrita por la ecuación de Newton

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{y} - \lambda\vec{v},$$

donde g da cuenta de la gravedad, $\hat{y}$ vector unitario vertical y λ es el coeficiente de amortiguamiento el cual da cuenta del roce del proyectil con el aire ($[\lambda] = kgr \times seg^{-1}$). El término $-\lambda\vec{v}$ da cuenta de la fuerza de roce.

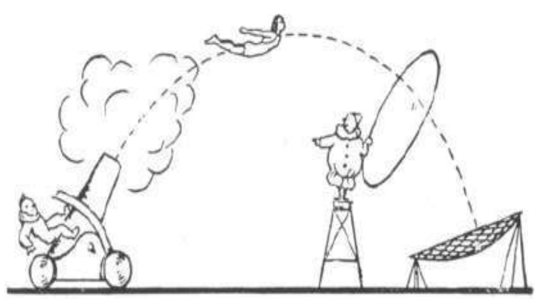


Figure 1. proyectil con roce.

1-a) Encuentre análiticamente la trayectoria del proyectil.
1-b) ¿ calcule el radio de curvatura $R(t)$ de la trayectoria del proyectil?

Dificultad 3.0.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

EJERCICIO VOLUNTARIO 05
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 30 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Centro de masa de un trompo: un modelo simplificado de un trompo es considerar que este está compuesto por un cono uniforme de masa M de ángulo α y altura h, y una esfera uniforme de masa m de radio R adherida en el centro de la sección mayor del cono, cómo se ilustra en la figura.

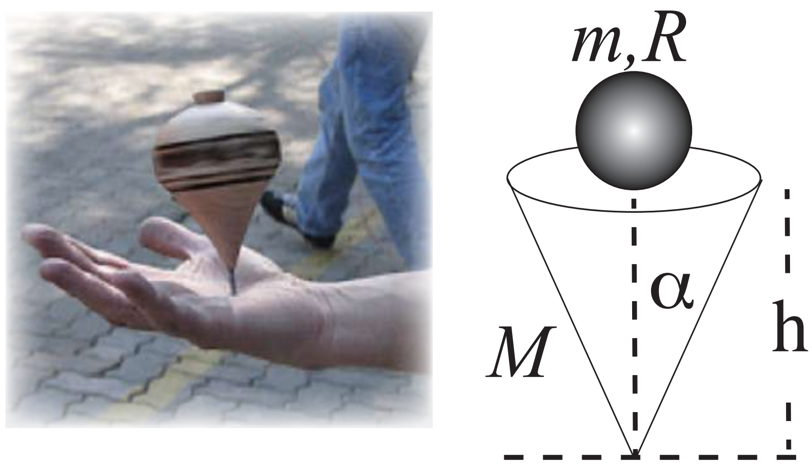


Figure 1. Trompo idealizado

Determine el centro de masa del trompo idealizado.

Dificultad 4.5.

EJERCICIO VOLUNTARIO 06
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 45 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Ley de Kepler en una molécula dipolar: Un modelo idealizado de una molécula dipolar, tal como 0_2, y C_2, es considerar que esta se compone por dos masas puntuales de valor m y conectadas en la dirección entre las partículas (fuerza central) por un resorte sin largo natural y constante elástica k, como se muestra en la figura.

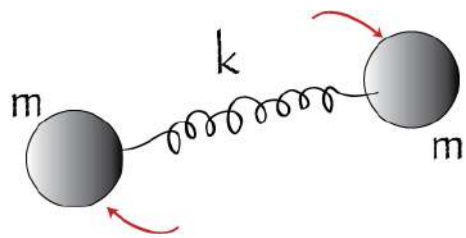


FIGURE 1. representación esquemática de una molécula dipolar

Desprecie los efectos de la gravedad y muestre que este sistema satisface la segunda ley de kepler.

Dificultad 4.5.

EJERCICIO VOLUNTARIO 07
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 30 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Gravitación modificada: Imagine la posibilidad que en otro universo un planeta de masa m_p y forma esférica de radio R_p ejerce una fuerza de gravedad sobre un cuerpo pequeño en la superficie de masa m de la forma

$$\vec{F} = -\frac{G m_p m}{d||\vec{r}||}\hat{r},$$

donde G constante gravitacional de Newton, d una distancia característica, $\vec{r}$ distancia del centro de masa del planeta al cuerpo de masa m y $\hat{r}$ vector unitario radial.

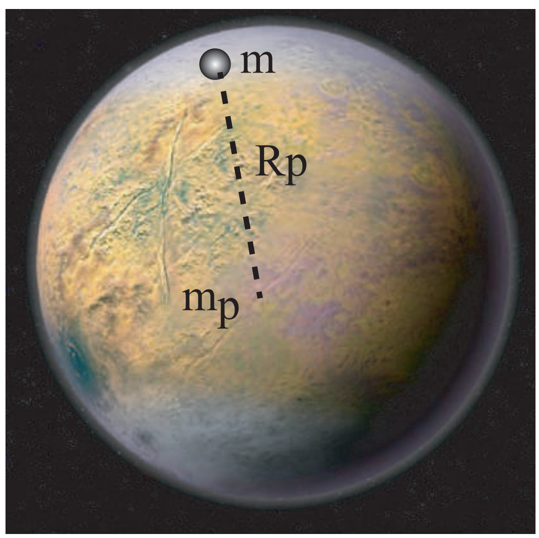


FIGURE 1. Planeta con gravedad modificada

Si el radio del planeta es R_p y el objeto de masa m esta a una distancia h sobre la superficie ($h \ll R_p$ y $||\vec{r}|| = R_p + h$):

7-1 Encuentre la gravedad g efectiva de este planeta.
7-2 En caso de lanzar un cuerpo en la superficie de este planeta, con velocidades pequeñas ¿Que trayectoria realizará el cuerpo?

Dificultad 3.5.

EJERCICIO VOLUNTARIO 08
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 45 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Dinámica cualitativa de un electrón externo en un átomo: Un átomo esta formado por un núcleo con protones y neutrones y diferentes átomos orbitando en diferentes niveles (ver figura). El electrón externo siente una fuerza efectiva central—debido al apantallamiento electrónico—con respecto al núlceo, lo cual genera un potencial efectivo de la forma (problema de dos cuerpos efectivos)

$$U_{Eff}(r) = -\frac{\kappa e^{-r/a}}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2},$$

donde r es la coordenada que da cuenta de la distancia entre el electrón y el núcleo, $\kappa > 0$ es una constante que caracteriza la intensidad de la interacción Coulombiana entre cargas, a es una distancia característica del apantallamiento generado entre el núcleo y orbitales eléctricos internos, l es el momento angular entre el electrón y núcleo, y μ es la masa reducida.

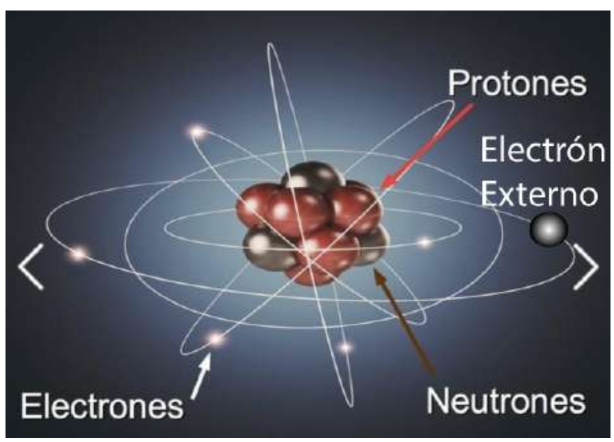


FIGURE 1. Átomo y electrones apantallados.

8-1 Grafiqué la forma que tiene el potencial efectivo, para esto use argumentos del análisis (cálculo).
8-2 A partir del potencial U_{Eff} analice los diferentes comportamientos cualitativo que tiene el sistema.

Dificultad 4.0.

EJERCICIO IRRENUNCIABLE 09
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 45 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Oscilador no lineal : Una partícula de masa m, la cual solo se puede moverse en una dirección caracterizada por la variable $x(t)$. Esta partícula se conecta a un resorte no lineal, ver figura, caracterizado por una constante elástica no lineal $k(x) = k_0 + \alpha x$, luego la ecuación de la partícula toma la forma

$$m\ddot{x} = -k_0 x - \alpha x^2$$

donde k_o y α dan cuenta de la constante elástica lineal y no lineal, respectivamente. Para $\alpha > 0$, se dice que el resorte es duro y para $\alpha < 0$ se dice que es blando.

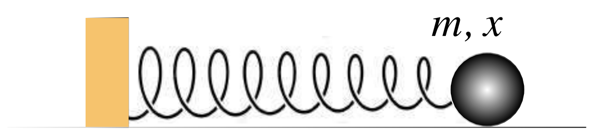


FIGURE 1. Oscilador no lineal.

9-1 Determine la solución de esta ecuación en su forma integral como función de la energía y constantes de integración.

9-2 Bosqueje el espacio de fase de este problema, para $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$ (Indicación: represente los puntos de equilibrios y trayectorias en el espacio de fase).

Dificultad 3.5.

EJERCICIO VOLUNTARIO 10
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 45 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Pequennãs ocilaciones : Considere un aro de radio R sobre el cual se colocan dos anillos idénticos de masa m conectados por medio de resortes ideales, de largo natural nulos y constantes elásticas k, como se ilustra en la figura

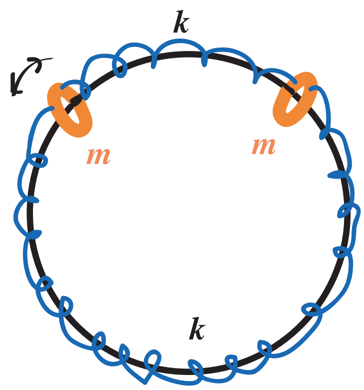


FIGURE 1. Osciladores acoplados.

si los anillos se desplazan sobre el aro sin frición

10-1 Determine el equilibrio del sistema.

10-2 Perturbe el equilibrio y determine las frecuencias propias y sus respectivos modos. Comente la forma que tienen estos modos.

Dificultad 4.0.

EJERCICIO VOLUNTARIO 11
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 45 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Péndulo de Foucault: Un péndulo ideal de largo l y masa m sobre la superficie de la tierra esta bajo el efecto de la gravedad g y rotación constante de la tierra Ω, como se ilustra en la figura. Como resultado de la rotación de la tierra, Léon Foucault mostro un comportamiento sorprendente de este péndulo.

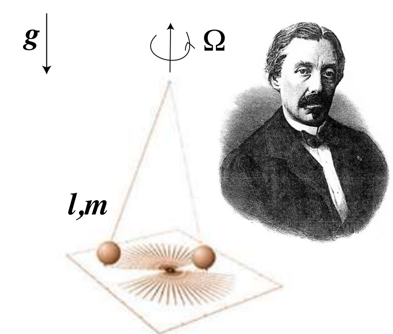


FIGURE 1. Péndulo de Foucault.

11-1 Determine la ecuación del movimiento del péndulo de Foucault.
11-2 Encuentre el equilibrio de este sistema y determine su estabilidad, como funcón de los parámetros físicos $\{g, \Omega, m, l\}$.

Dificultad 4.0.

EJERCICIO IRRENUNCIABLE 12
MECÁNICA FI2001-2022

PROF. MARCEL G. CLERC
AUXILIAR: ROBERTO GAJARDO & LUCCIANO LETELIER
TIEMPO: 45 MINUTOS, JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUS RESULTADOS.

Péndulos acoplados: Considere dos péndulos ideales de largos l y masas m, los cuales tienen sus pivotes en la misma linea horizontal bajo los efectos del campo gravitacional (ver figura). Los péndulos están separados en sus puntos de soporte por una distancia L_0. Si los péndulos se conectan en sus extremos libres por una resorte ideal de constante elástaica K y largo natural L_0, como se ilustra la figura.

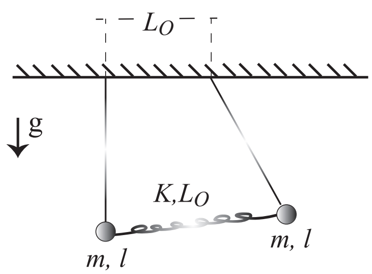


FIGURE 1. Péndulos acoplados.

Usando el formalismo Lagrangeano, determine las ecuaciones de movimientos.

Dificultad 3.5.