Tarea XIV
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Problema de Galileo: Usando el método de Hamilton-Jacobi, considere un cuerpo que cae verticalmente en la superficie de la tierra (considere que la gravedad es constante), descrito por el Hamiltoniano

$$H(P_y, y) = \frac{1}{2m} P_y^2 + mgy.$$

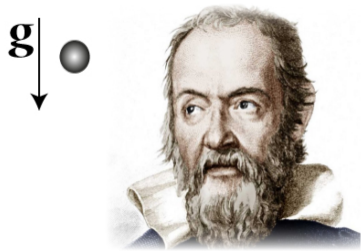


FIG. 1. Problema de Galileo.

Encuentre la Acción S y las ecuaciones de movimiento.

2) Partícula en un campo dipolar: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo externo dipolar, el cual es descrito por el potencial

$$V(r) = \frac{k \cos\theta}{r},$$

donde $\{r, \theta\}$ coordenadas radial y angular en esféricas, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento.

3) Partícula en un campo Kepleriano mas un potencial externo: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo radial kepleriano y un campo constante en una dirección arbitraria, el cual es descrito por el potencial

$$V(r) = \frac{k}{r} - F_0 z,$$

donde $\{r, z\}$ coordenadas radial y vertical, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante

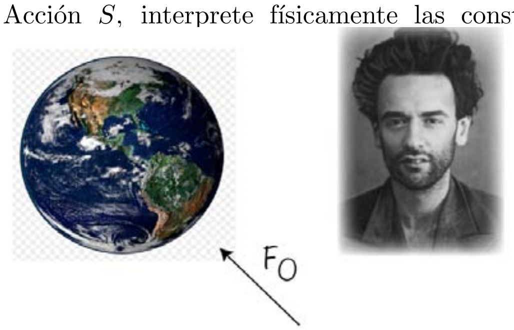


FIG. 2. mmmm!

de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento.

4) Campo magnético constante: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo magnético constante $\vec{B}$, el cual es descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(\left(P_x + \frac{eB}{c}y\right)^2 + P_y^2 + P_z^2\right),$$

donde $\{e, c, B\}$ son la carga eléctrica de un electron, la velocidad de la luz, constante asociada a la intensidad del campo magnético, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento.

Tarea XIII
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Oscilador Isotrópico Considere una partícula puntual de masa m, la cual se mueve en el plano xy, bajo la influencia de un resorte isotrópico de constante elástica k y potencial $V(\vec{r}) = k\vec{r}^2/2$ con $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$. Luego el Hamiltoniano que describe el sistema es

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

Introduciendo las cantidades $S_1 = (P_x^2 - P_y^2)/2m + k(x^2 - y^2)/2$, $S_2 = P_xP_y/m + kxy$, $S_3 = \omega(xP_y - yPx)$ con $\omega = \sqrt{k/m}$.

Muestre que:

1-1) las cantidades S_i son cantidades conservadas, es decir $\{H, S_i\} = 0$. Interprete su sentido físico.

1-2) $\{S_i, S_j\} = \varepsilon^{lij} 2\omega S_l$ donde ε^{lij} es el tensor de Levi-Vivita.

1-3) $H^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

2) Transformación canonica: Considere la siguiente transformación de coordenadas de variables conjugadas

$$Q = -p, \tag{1}$$
$$P = q + Ap^2, \tag{2}$$

donde $\{q, p\}$ son las variables conjugadas originales, A una constante.

2-1) Encuentre el generador de la transformación canó-nica $F_1(q, Q)$.

2-2) Mediante la relación $F_2(q, P) = F_1(q, Q) + QP$, use este nuevo generador, analice las nuevas coordenadas e interprete la transformación.

2-3) Considere el Hamiltoniano de una partícula moviendose verticalmente en un campo gravitatorio constante (problema de Galileo)

$$H(q, p) = \frac{P^2}{2m} + mgq.$$

Utilizando la libertad de A, encuentre el Hamiltoniano $K(Q, P)$ que es cíclico en una variable. Utilizando las soluciones temporales en el sistema Hamiltoniano simple construya la soluciones del problema original

3) Problema de n cuerpos: La dinámica de interacción entre n partículas es descrita por el Hamiltoniano,

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1,j=1}^{n} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

donde V_{ij} es el potencial de inetracción entre la partícula i y la partícula j. La dinámica vista desde un sistema de coordenadas no inercial que acelera uniformemente genera que las coordenadas en este sistema tengan la forma

$$\vec{Q}_i = \vec{r}_i - \frac{\vec{a}}{2}t^2.$$

3-1) Muestre que uno puede conectar estos dos sistemas de representación por medio de una transformación canonica del tipo $F(\vec{r}_i, \vec{P}_i)$.

3-2) Escogiendo apropiadamente la transformación canónica muestre que el nuevo Hamiltoniano $K(\vec{Q}_i, \vec{P}_i)$ puede tener la misma forma que el Hamiltoniano original $H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ mas un termino efectivo que da cuenta de una campo constante externo.

4) Oscilador anarmónico y forma normal: Considere la siguiente transformación cerca de la identidad

$$q = Q + aQ^2 + bQP + cP^2, \tag{3}$$
$$p = P + dQ^2 + eQP + fP^2, \tag{4}$$

donde $\{a, b, c, d, e, f\}$ son parámetros pequeños de orden $\epsilon \ll 1$.

4-1) Encuentre que relaciones deben satisfacer los parámetros $\{a, b, c, d, e, f\}$ para que las transformaciones sean canónicas al orden lineal en ϵ.

Un oscilador ligeramente anarmónico esta descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 + \epsilon\beta q^3.$$

4-2) Usando la transformación canónica anterior (formulas 3 y 4), escogiendo adecuadamente los parámetros anteriores, muestre que el nuevo Hamiltoniano tiene la forma (forma normal)

$$K(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 Q^2 + O(\epsilon^2),$$

Interprete este resultado.

4-3) Usando las soluciones del sistema Hamiltoniano $K(Q, P)$ y usando la transformación canónica encuentre solución del problema anarmónico.

Tarea XII
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1) Sólido rígido (la dinámica de un cuerpo giratorio): Las ecuaciones de movimiento que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3,$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3,$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2,$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y I_i es el momento de inercia con respecto al eje principal i del sólido rígido bajo estudio.

¿Estas ecuaciones son lagreangeanas? Y si lo son caracterice el lagrangeano que describe este sistema (INDICACION: varaciones de Poincaré).

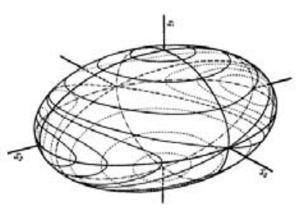


FIG. 1. Espacio de fase de un sólido rígido

2) Algebra de momentos angulares Usando las propiedades de las variables conjudades en los paréntesis de poisson. Muestre que

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

donde L_i es la i-esima componente del momento angular $\vec{L}$, ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-civita, es decir, el tensor es 1 cuando los indices están ordenados en forma cíclica, -1 cuando estan en forma anti-cíclica y cero cuando se repite al menos un indice. Además muestre que se satisface

$$\{\vec{L}^2, \vec{L}\cdot\vec{n}\} = 0,$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario.

L_z es el generador infinitesimal de rotaciones en el espacio. Cuál es el efecto de este generador sobre las variables momentun generalizadas.

3) Hilo Magnético: Considere un hilo magnético con anisotropía positiva el cual es forzado con un campo magnético externo, ortogonal al hilo y compuesto por una componente constante y otra oscilatoria, tal como se ilustra en la figura. Este sistema físico puede ser interpretado como una cadena de osciladores no lineales forzados paramétricamente. Cerca de su resonancia paramétrica la dinámica de la magnetización en la dirección del hilo magnético es descrita por la amplitud

$$\frac{dA}{dt} = -i\nu A - i|A|^2 A - \mu A + \gamma \bar{A},$$

donde ν es el desincorización entre la frecuencia de forzaje y el doble de la frecuencia de prececión, μ da cuenta de la disipación y γ es la amplitud de forzamiento magnético

Estudie los estados de equilibrio de este sistema, como función de los parámetros $\{\nu, \mu, \gamma\}$ y caracterice cuidadosamente todas las bifurcaciones.

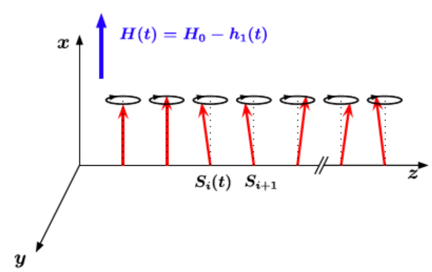


FIG. 2. Hilo magnético.

4) Laser (Maxwell y Bloch): La descripción semiclásica del láser se basa en la interacción autoconsistente del campo electromagnético con un medio activo dentro de una cavidad óptica. El campo eléctrico se describe clásicamente (por las ecuaciones de Maxwell) y la materia como conjunto de átomos que posee dos niveles de energía cuantizados; términos fenomenológicos se añaden para completar la descripción. El sistema es descrito por

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \kappa\frac{\partial E}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\gamma_\perp \frac{\partial P}{\partial t} - (\gamma_\perp^2 + (1+\delta)^2)P - \mu^2 N E,$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_\parallel (N - N_0) + E\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma_\perp P\right), \qquad (1)$$

donde $E(x,t), P(x,t), N(x,t)$ son respectivamente el campo eléctrico, la polarización y la inversión de población y $\{\kappa, \gamma_\perp, \gamma_\parallel, N_0, \delta, \mu\}$ son parámetros que caracterizan la dinámica de este sistema. x es la dirección de propagación del campo eléctrico

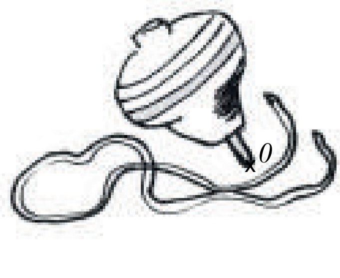
Muestren que las ecuaciones anteriores sin disipación ($\kappa = \gamma_\perp = \gamma_\parallel = 0$) son Hamiltonianas y caracterice el paréntesis de Poisson.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea XI
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1) Trompo con púa fija: Considere un trompo simétrico con púa fija, es decir, el momento de inercia en la dirección vertical es distinto.



1-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.
1-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema y deduzca el Routhiano que caracteriza la dinámica de este sistema.
1-c Estudie el espacio de fase de este sistema reducido y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

2) Identidad de Jacobi y Lagrage Los paréntesis de Poisson satisfacen la siguiente identidad

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$$

y los paréntesis de Lagrange satisfacen la siguiente identidad

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\{x^b,x^c\}+\frac{\partial}{\partial x^c}\{x^a,x^b\}+\frac{\partial}{\partial x^b}\{x^c,x^a\}=0.$$

donde $x^\mu=(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p})$. Demuestre esta propiedad.

Demuestre las dos propiedades anteriores.

3) Teorema de Poisson: Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H(q^1,q^2,P_1,P_2)=q^1P_1-q^2P_2-a(q^1)^2+b(q^2)^2,$$

donde a y b son constante.
3-a Muestre que las tres siguientes cantidades son conservadas

$$f_1=\frac{p_2-bq^2}{q^1},$$
$$f_2=q^1q^2,$$
$$f_3=q^1e^{-t},$$

3-b Estas constantes de movimientos son funcionalmente independientes
3-c Encuentre el número máximo de constantes.

4) Potencial extraño: Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia de un potencial generalizado (el cual depende explcitamente de la velocidad),

$$V=\frac{1+\dot{r}^2}{r},$$

donde r es la distancia radial al origen.
3-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.
3-b Analice la conservación de momento angular.
3-e Estudie el espacio de fase de este problema y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

Tarea X
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1-Pequeñas oscilaciones: considere un torna mesa que gira muy rápido entorno al eje $\overline{OA}$ (ver figura) con velocidad angular Ω, si sobre el torna mesa se cuelgan dos péndulos idénticos de masas m y largos l, separados a una distancia L y a su vez conectados con un resorte de largo natural L y constante elástica k (ver figura). Notar que el punto O esta justo a una distancia simétrica con respecto a los péndulos

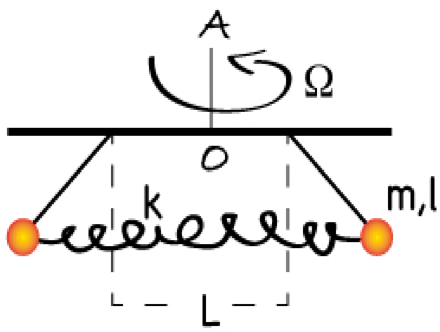


FIG. 1. Péndulos girando.

1-a) Calcule el lagrangeano del sistema, para Ω grande muestre que el sistema tiene equilibrio estable donde los péndulos no son verticales.
1-b) Calcule las frecuencias y modos propios de oscilación del sistema. Interprete a que soluciones corresponden esos modos.
1-c) Analice el limite $\Omega \to \infty$ y comente sus resultados

2) Bifurcación Andronov-Hopf-Poincaré: Considere el siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x,$$
$$\dot{y} = \mu y + x - (x^2 + y^2)y,$$

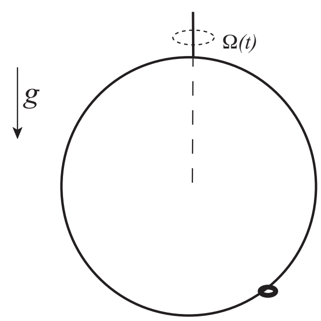
donde $\{x(t), y(t)\}$ variables que dan cuenta del espacio de fase de un oscilador no lineal y μ es un parametro de control.

2-a Muestre que este sistema exhibe una bifurcación de Andronov-Hopf-Poincaré para la solución $(x, y) = (0, 0)$ cuando μ es variado.

2-b Después de ocurrir la bifurcación el sistema tiene como atractor una solución periódica (ciclo limite), encuentre la expresión analítica de este ciclo limite.

2-c Grafique el espacio de fase del sistema para valores de μ negativos y positivos.

3) Péndulo de Andronov-Kapitza: Considere un aro de diámetro R y momento de inercia I en la dirección vertical con respecto al centro, sobre el cual se coloca una anillo de masa m que puede deslizarse sin fricción sobre el aro (ver figura).



Si el aro está girando con velocidad angular $\Omega(t) = \Gamma \sin(\omega t)$. En el límite de alta frecuencia ($\omega \to \infty$), encuentre la ecuación que caracteriza este sistema y en función de Γ caracterice los diferentes equilibrios (diagrama de bifurcación).

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea IX
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura 1), bajo la influencia de un campo gravitacional constante g. El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura. **1-a**

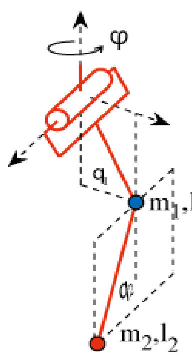


FIG. 1. Péndulo esférico doble con restriciones.

Muestre que los péndulos son un equilibrio del sistema.

1-b ¿Cuál es el lagrangeano cuadrático que caracteriza este equilibrio?

1-c Caracterice los modos propios de las pequeas oscilaciones y escriba la solución general de este sistema para ángulos pequeños.

2) Ecuaciones de Euler: las ecuaciones que describen un sólido rígido libre fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3,$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3,$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2,$$

En partícular estas ecuaciones describen la dinámica de un Boomerang en su sistema solidario de ejes principales (ver figura 2).

2-a ¿Este sistema es lagrangeano?

2-b Encuentre los puntos de equilibrio.

2-c Estudie la estabilidad de estos puntos.

2-e Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico.

3) Péndulo de Tap-Thomson Una barra de longitud a está restringida a tener uno de sus extremos fijo al origen de coordenadas (ver figura 3). En el otro extremo

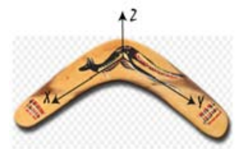


FIG. 2. Las ecuaciones de Euler describen la dinámica de un Boomerang.

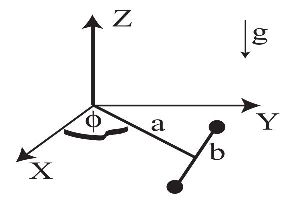


FIG. 3. Péndulo de Tap-Thomson.

una barra de longitud b puede rotar sobre su punto medio, pero siempre perpendicular a la barra a. En los extremos de la barra b se sujetan dos masas iguales de magnitud m. Las barras tienen masa despreciable (Péndulo de Tap-Thomson).

3-a Obtenga las ecuaciones de movimiento para el péndulo.

3-b Calcule el Routhiano que caracteriza a este sistema y encuentre el sistema reducido.

3-c Encuentre los puntos de equilibrio y estudie su estabilidad.

4.- Molécula de $C0_2$: un modelo mecánico de la molécula $C0_2$ es consider una partícula de masa M, conectada a dos partículas de masas m por medio de resortes ideales de constante elástica k y largo natural l_0 (ver figura), estas partículas solo se pueden mover en el eje de la molécula.

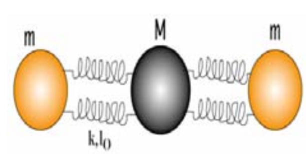


FIG. 4. Modelo mecánico de $CO2$.

Encuentre y caracterice los modos propios de oscilación

Tarea VIII
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1-Péndulo plano doble: Considere un péndulo doble el cual esta formado por dos cuerdas ideales de largo l y masas puntuales de masa m. El péndulo superior tiene un extremo fijo en el punto O y el péndulo inferior tiene un extremo fijado a la masa del péndulo superior. Ambos péndulos se mueven bajo la influencia del campo gravitatorio en el mismo plano como se ilustra en la figura

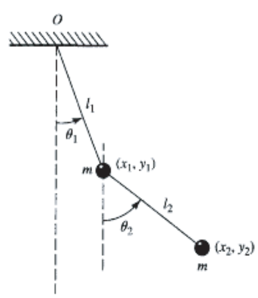


FIG. 1. Péndulo doble.

El equilibrio natural de este sistema es que ambos péndulos estén verticales.

1-1 Calcule el Lagrangeano cuadrático.

1-2 Encuentre las frecuencias de pequeñas oscilaciones, interprete estas frecuencias y describa graficamente los modos normales.

2.- Campos magnéticos: calcule la sección eficaz de scattering en el caso de una partícula cargada que siente un campo magnético $\vec{B_o}$ solo al interior de una esfera de radio a.

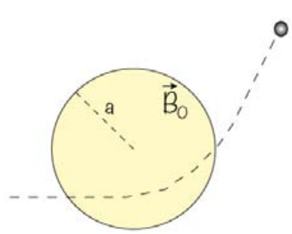


FIG. 2. Partícula que cruza una esfera con campo magnético.

3.- Scattering de potenciales centrales: Calcule la sección eficaz de scattering diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ y total σ de una partícula en un potencial central $U(r) = \alpha/r^n$, donde α y n son parámetros arbitrarios que caracterizan el potencial (ver figura 3).

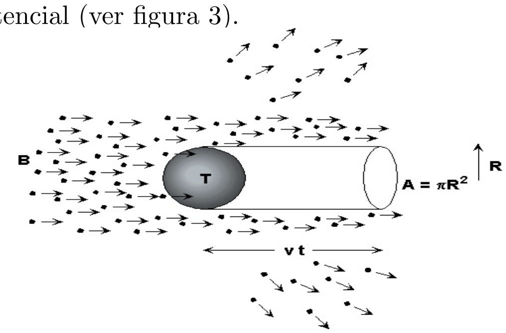


FIG. 3. Scattering de potenciales centrales.

4-Ley de Snell: muestre que una partícula de energia E es refractada cuando pasa de una región sin potencial a una región con potencial $-V$ (ver figura). Si el ángulo de incidencia es θ_0 y el ángulo de refracción es θ_1 satisfacen la relación (Ley de Snell(1662) y Ibn Sahl (984))

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1} = n,$$

donde los ángulos son medidos con respecto a la normal y $n = \sqrt{1 + V/E}$ es el indice de refracción.

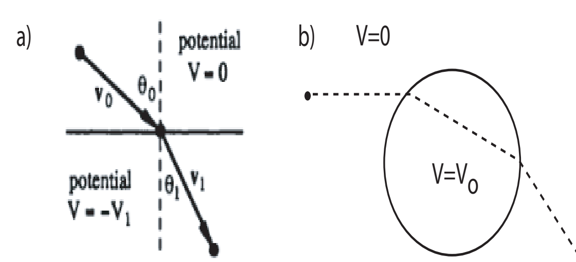
4-1 Use la ley de Snell anterior para mostrar que una partícula que incide con un parametro de impacto b sobre un potencial cuadrado

$$V(r) = \begin{cases} -V_o & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

es escateriada en un ángulo ϑ que satisface la relación

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2 \sin^2\vartheta/2}{n^2 + 1 - 2n\cos\vartheta/2}$$

4-2 encuentre la sección diferencial de scattering.



Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea VII
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

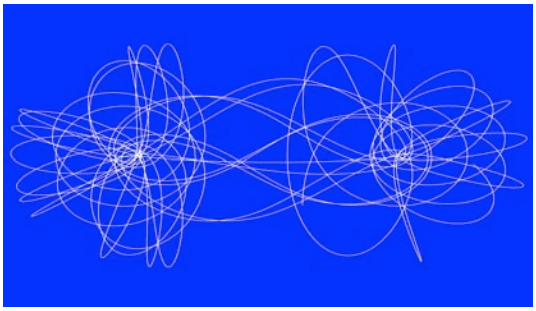


FIG. 1. -Problema de Euler Generalizado.

1.-Problema de Euler Generalizado: Considere la siguiente generalización del problema restringido de tres cuerpos de Euler por medio de realizar la siguiente modificación: los dos cuerpos celestes masivos no realizan una órbita circular sino una de tipo elíptica.

1-a) Encuentre la ecuación de movimiento para el tercer cuerpo pequeño.

1-b) ¿Este sistema tiene una función de Jacobi ? en caso de encontrar una cantidad interprete su significado físico.

1-c) Simule numéricamente las ecuaciones encontradas e ilustre algunas trayectorias. Particularmente, uno de los mayores avances del siglo pasado fue el estudio de Poincaré del problema de tres cuerpos, caracterice el tipo de órbitas e ilustre que son caóticas.

2 Puntos colineales: Para el problema restringido de dos cuerpos estime analíticamente los puntos colineales— explícite claramente sus supuesto y aproximaciones. Para el caso del Sol y la Tierra estime el valor numérico de estos puntos.

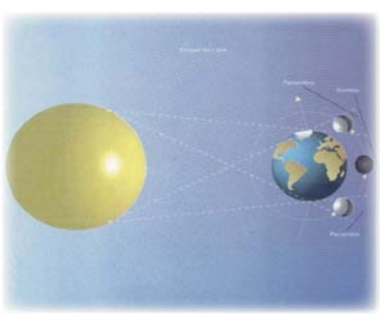


FIG. 2. Sistema Sol-Tierra-Luna.

3- Péndulo de Foucault: considere un péndulo ideal de largo l y masa puntual m, bajo el efecto del campo gravitacional constante g y rotación Ω del planeta en el cual se encuentra, el cual se ilustra en la imagen (suponga que el planeta es de dimensiones similares a la tierra).

FIG. 3. Péndulo de Foucault.

3-a) Muestre que la posición vertical es un equilibrio y caracterize su estabilidad cuando uno modifica la rotación del planeta (parámetro de control).

3-b) En el caso de considerar fricción húmeda, muestre como se modifica el estudio anterior.

4) Trompo con púa Fija Considere un trompo simétrico de masa M, momentos de inercia $I_1 = I_2 = I$, I_3 con respecto a los ejes principales. El centro de masa se ubica a una distancia l de la púa (ver figura), la cual es representada por el punto O. En el Caso que la púa este fija

FIG. 4. Péndulo de Foucault.

4-a ¿Cuál es la velocidad angular del trompo?

4-b ¿Cuál es la acción que describe a este sistema?

4-c Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales están relacionadas estas cantidades conservadas.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea VI
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1.-Órbitas planetarias relativistas: Uno de los hechos experimentales que contradicen la teoría de gravitación universal de Newton es la precesión de la órbita de Mercurio. Su órbita no es una elipse propiamente tal, sino una curva que precesa con respecto a un eje. La precesión en cuestión puede explicarse a partir de una fuerza central atractiva (por unidad de masa) de la forma:

$$F(r) = \mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{3h^2}{c^2 r^4}\right),$$

donde h es el momento angular por unidad de masa del planeta alrededor del sol y c una constante con unidades de velocidad. El primer término corresponde al límite newtoniano y el segundo es una modificación que dará cuenta de la precesión.

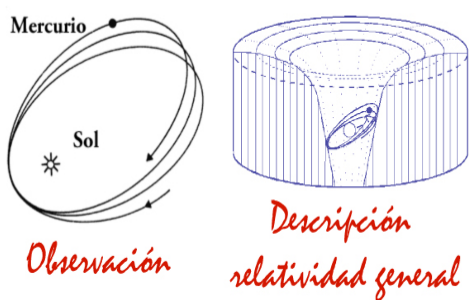


FIG. 1. Precesión de la órbita de Mercurio.

1-a Calcule la precesión angular que sufre un planeta alrededor de un astro central como el sol cuando se le aplica la fuerza $F(r)$.

1-b Calcule en forma exacta (expresión analítica) la órbita que sigue tal planeta y verifique que su expresión se reduce a la de la teoría newtoniana en un límite apropiado.

1-c Cabe mencionar que la corrección en cuestión es entregada naturalmente por la teoría de la relatividad general de Einstein, en este contexto, la constante c es la velocidad de la luz.

2) Orbita antifaz: Determine la fuerza central que genera órbitas del tipo "antifaz" como se ilustra en la figura 2, la cual tiene la forma $r^2 = 2a^2 cos(2\phi)$.

3.- Fuerza central efectiva: considere una partícula que se mueve sobre una parábola de revolución caracterizada por una concavidad α, como se ilustra en la figura 3.

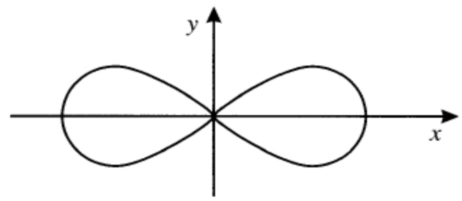


FIG. 2. Órbita antifaz.

3-a Muestre que la dinámica de este sistema es análogo a un problema de dos partíulas con un potencial efectivo.

4) Partícula súper no Galileano: Considere una partícula descrita por un lagrangeano

$$L = \alpha\frac{\dot{\vec{v}}^2}{2} + m\frac{\vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}),$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del vector $\vec{r}$ en un sistema de coordenadas inercial. Si esta partícula es descrita en un sistema de coordenadas no inercial el cual es descrito por un vector de traslación $\vec{R}(t)$ y velocidad ángular $\vec{\Omega(t)}$. Encuentre el lagrangeano y ecuaciones de movimientos que describe esta partícula desde el sistema no inercial. Interprete físicamente los términos de la ecuación de movimiento.

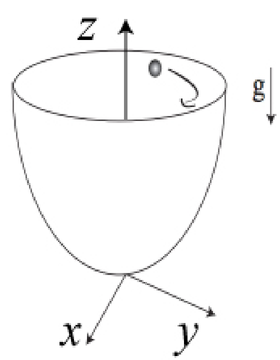


FIG. 3. Partíclua sobre una superficie parabólica.

Fisica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea V
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

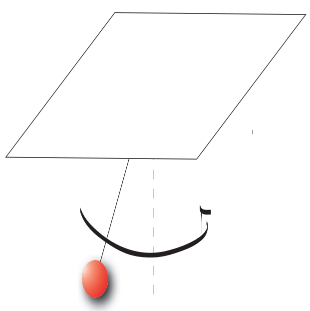
1.- Potencial de Morse: Empiramente se ha mostrado que la interacción de moléculas diatómicas es central y se puede describir por (potencial de Morse, P.M. Morse, *Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels*, Phys. Rev. **34**, 57, 1929)

$$V(r) = D\left(e^{-2\alpha r} - e^{\alpha r}\right)$$

donde los parámetros $\{\alpha, D\}$ son positivos y caracterizan la interacción.

1-a En el caso del movimiento de una partícula unidimensional encuentre explícitamente las trayectoria $x(t)$ y carcterice el tipo de soluciones en función de la energía. Caracterice las trayectorias en el espacio de fase.

1-b En el caso que el movimiento es tridimensional, caracterize numericamente la órbita observada.



2.- Péndulo ideal: Considere un péndulo formado por una cuerda ideal de largo l y una masa puntual m, como se ilustra en la figura.

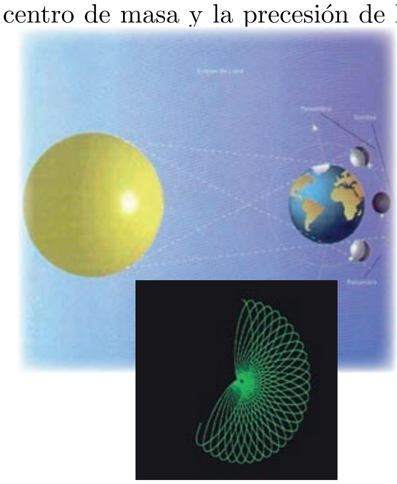
Determine el periodo de oscilación como función de la condición. En caso que sea necesario considere las aproximaciones que considere pertinentes.

3.- Sol-Tierra-Luna: Muestre que el potencial efectivo del sistema luna tierra tratado como un solo objeto bajo el campo gravitacional del Sol puede ser aproximado por un potencial

$$U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\delta}{r^3} + \frac{l^2}{2\mu r^2},$$

donde r es la distancia del Sol al centro de masa de tierra y la luna.

Con este nuevo potencial, calcule explícitamente la órbita del centro de masa y la precesión de la velocidad



angular de la órbita descrita por el centro de masa, como se ilustra la figura (puede usar las aproximaciones que estime conveniente, siempre y cuando estén justificadas).

4.-Vector de Laplace-Runge-lenz: Para el problema de Kepler, interaccion de dos cuerpos celeste, uno encuentra que el vector (laplace-runge-lenz)

$$A = \dot{r} \times L - GM\hat{r},$$

donde r es el vector posición, L es el momento ángular, G constante de gravitacion, M la masa y $\hat{r}$ vector unitario en la dirección del vector posición.

4-a Muestre que este vector es constante.

4-b Encuentre una transformacion de simetria que permita obtener esta cantidad conservada.

4-c en el caso que la fuerza no sea proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, muestre que este vector no es conservado.

Tarea IV
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1- Ecuación de Newton covariante: Considere el siguiente langrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U(q^i),$$

donde g^{ij} es la métrica.

1-a) Muestre que las ecuaciones de movimiento toma la forma

$$g_{ij}\left(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{q}^l\dot{q}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial q^i},$$

donde los coeficientes Γ^j_{lm} son los simbolos de Christoffel, definidos por

$$\Gamma^j_{lm} \equiv \frac{1}{2}g^{jk}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k}\right).$$

1-b) Considere el siguiente lagrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = \sqrt{g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j} - U(q^i),$$

calcule las ecuaciones de movimiento y comparelas con aquellas obtenidas en (1-a), comente claramente sus observaciones.

FIG. 1. Cometa.

2-Sistemas disipativos: Considere un cometa en el espacio inter estelar, el cual se puede modelar como una partícula de masa m, bajo la influencia de un potencial externo $U(\vec{r})$ y una fuerza de fricción humeda caracterizada por un coeficiente de fricción α, es decir este cometa esta descrito por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} - \nabla U(\vec{r}),$$

donde ∇ es el gradiente.

2-a) Encuentre la acción que describe este sistema.

2-b) En el caso que el potencial es el gravitacional, que ocurrira con las órbitas parabólicas y elípticas típicamente exhibida por los cometas.

3-Formalismo lagrangiano con campos: En clases a Usted se le enseño el formalismo lagrangiano para partículas puntuales, en este problema deberá trabajar lo mismo pero para campos, esto es, cantidades físicas que dependen no sólo del tiempo sino que del espacio también. Sean $\phi^\mu(\vec{r}, t)$ una colección de campos descritos por la siguiente acción:

$$S[\phi^\mu, \nabla\phi = \partial_{\vec{r}}\phi] = \int \mathcal{L}(\phi^\mu, \nabla\phi^\mu, t, r)dxdt.$$

En este contexto $\mathcal{L}$ se denomina densidad lagrangiana.

3-a Encuentre el análogo de las ecuaciones de Euler-Lagrange para ésta acción.

3-b Demuestre que $\mathcal{L}$ no es único, argumente.

3-c Trabaje el teorema de Noether correspondiente. En particular, establezca el análogo para campos de lo que era una cantidad conservada en el caso de partículas puntuales (corriente conservada).

3-d Considere la siguiente acción para un campo complejo

$$S[A, \bar{A}] = \int \left[\frac{\partial_t A\partial_t\bar{A}}{2} - \frac{\nabla A\nabla\bar{A}}{2} + \frac{m}{2}|A|^2 - \frac{\lambda|A|^4}{4}\right]dxdt,$$

encuentre la ecuación que rige a estos campos y las corrientes conservadas asociadas a simetrías espacio-temporales.

4-Ecuaciones de Newton: Calcule los simboles de Cristoffell y escriba las ecuaciones de Newton en las siguientes cordenadas

4-a Cilíndricas.

4-b Esféricas.

4-c Parabólicas.

Tarea III
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección vertical, ver figura 1. Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.

1-a Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

1-b Encuentre (gráficamente) los puntos de equilibrio del sistema (equilibrios relativos), estudie la estabilidad de éstos.

1-c En el caso que la condición inicial engendre un pequeño momento angular en la dirección vertical, describa cualitativamente cual es el movimiento del anillo. En el caso que engendre una gran momento angular que prodría ocurrir con el anillo.

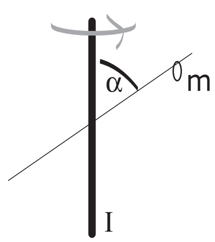


FIG. 1. Vara Mágica.

2)Péndulo doble: Considere un sistema formado por dos péndulos planos ideales–péndulo doble–de largo y masa $\{l_1, l_2\}$ y $\{m_1, m_2\}$, respectivamente. Uno de los péndulos tiene fijo su extremo superior a un pivote y el otro esta conectado al otro péndulo (ver figura).

2-a Calcule la acción de este sistema.

2-b Varie la acción y encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.

2-c Encuentre las cantidades conservadas del sistema.

3) Principio de Fermat: La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio: "El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos" (PRINCIPIO DE FERMAT). Si $v(x, y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio, por simplicidad considere el plano $\{x, y\}$.

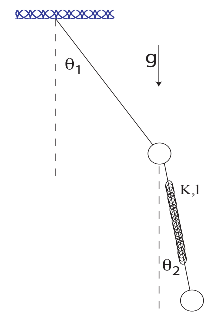


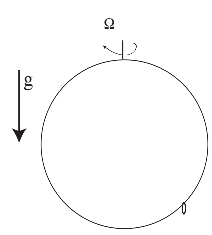
FIG. 2. Péndulo doble.

3-a Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de fermat.

3-b Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuación. Recomendación: a partir del principio de Fermat deduzca la ley de Snell or Ibn Sahl-Snell (que fue establecida por Ibn Sahl 984 y Snell 1621), usando esta ley trate de interpretar su resultado.

3-c Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = cy$. ¿que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?

4) Péndulo de Andronov: Considere un aro de radio R, el cual esta lubricado. Un anillo de masa m, puede deslizarse sobre el aro sintiendo el efecto de la disipación húmeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ. Si el aro es sometido a girar con respecto a la vertical con una velocidad angular Ω (ver figura).



3-a Escriba un principio variacional que describe este sistema.

3-b Encuentre las ecuaciones de movimiento y caracterice las cantidades conservadas.

Tarea II
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase auxiliar.

1) Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada: Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad descrito por la coordenada $q(t)$. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explcitamente del grado de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\mathrm{L}(q, q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} = \frac{d^l q(t)}{dt^l}$ es su derivada temporal l-esima, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros que caracterizan al sistema físico bajo estudio. **1-a** ¿Cuál es la ecuación de movimiento que uno obtiene si uno minimiza la acción generada por el lagrangeano anterior ?

1-b ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

2) Lagrangeano para un sistema mecánico: A partir de las ecuaciones de Newton que describen un sistema mecánico que tiene N-variables cartesianas y N-n restricciones. Usando desplazamientos virtuales que respetan las restricciones, Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que el lagrangeano para un sistema mecánico tiene la forma

$$\mathrm{L} = T - V$$

donde T es la energía cinetica y V es la energía potencial.

3) Sistema disipativo: Considere un péndulo plano el cual esta compuesto por una ésfera y cuerda ideal de masa m y largo l, respectivamente (ver figura 1). Como consecuencia de la presencia del aire este ejerce una fuerza proporcional a la velocidad caracterizada por un coeficiente de amortiguamiento ν, es decir, las ecuación de movimiento del péndulo toma la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta) - \nu\dot{\theta}$$

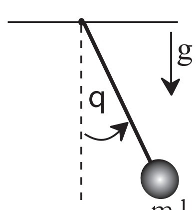


FIG. 1. Péndulo con disipación.

3-a Encuentre la acción que caracteriza a este sistema.

3-b Caracterice geométricamente su respectivo espacio de fase.

4) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.

4-a¿Cuál es el lagrangeano que caracteriza a este sistema?

4-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

4-c ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema e interprte fisicamente los diferentes términos de las ecuaciones de movimiento?

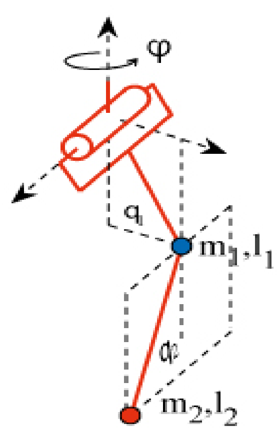


FIG. 2. Péndulo esférico doble con restriciones.

Tarea I
Mecánica clásica (2017)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Diego Garcia Sepúlveda
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1) Oscilador no-lineal: Considere un oscilador inhomogeneo no lineal (ver figura 1), el cual para pequeñas deformaciones con respecto a su posición de equilibrio en la dirección horizontal satisface la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x + \alpha x^3,$$

donde m y $x(t)$ son la masa y posición de la partícula en el extremo del resorte, respectivamente, ω frecuencia natural de oscilacción del resorte, α da cuenta de la respuesta no lineal.

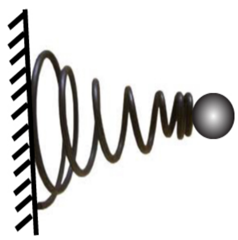


FIG. 1. Resorte no lineal

1-a Proponga una acción que describa este sistema.
1-b Encuente analíticamente las solución de este problema.
1-c Caracterice geométricamente el espacio de fase de manera cualitativa y numérica.

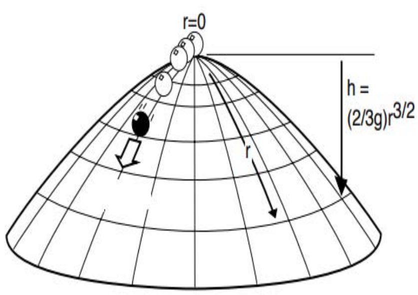


FIG. 2. Domo axialmente simétrico.

2) Ecuaciones de Newton no-deterministas. Considere una masa en el domo axialmente simétrico mostrado en la figura 2 que posee una coordenada radial r inscrita en su superficie (puede pensar en r como la distancia recorrida caminando sobre el domo, como muestra la figura), la altura medida desde la punta del domo hacia abajo viene dada por $h = (\frac{2}{3g})r^{3/2}$.

2-a Muestre que existen dos soluciones distintas asociadas a las condiciones iniciales $r(0) = 0$ y $\dot{r}(0) = 0$. Considere sólo trayectorias radiales.

2-b Si hizo bien la parte a) notará que una de las dos soluciones es 'patológica' (mencione cual es esa 'patológica'). Muestre, sin embargo, que la primera ley de Newton se cumple satisfactoriamente para ambas soluciones.

2-c Usando su intuición establezca algún criterio para decidir por una de las soluciones. No obstante, diga por qué colocar un criterio adicional no es correcto. Usando que la segunda ley de Newton es invariante ante la transformación $t \to -t$ diga por qué la solución 'patológica' es de hecho físicamente plausible.

3) Dinámica de un boya: Considere un boya homogenea con forma aproximadamente coníca como se ilustra en la figura flota en el mar.

Si el material con que esta hecha la boya es de densidad menor que la del agua del mar, considere que el agua esta quieta y por simplicidad considere que el movimiento es solo vertical

3-a Encuentre la ecuación de movimiento de la boya.

3-b Determine la Acción que caracterice este sistema.

3-c Caracterice la diámica de la boya por medio de soluciones analíticas y el uso del espacio de fase.

FIG. 3. Boya en alta mar.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea I
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el viernes, respectivo, antes de la clase.

1) Oscilador no-lineal: Considere un oscilador inhomogeneo no lineal (ver figura 1), el cual para pequeñas deformaciones con respecto a su posición de equilibrio en la dirección horizontal satisface la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x + \alpha x^2,$$

donde m y $x(t)$ son la masa y posición de la partícula en el extremo del resorte, respectivamente, ω frecuencia natural de oscilacción del resorte, α da cuenta de la dureza del resorte.

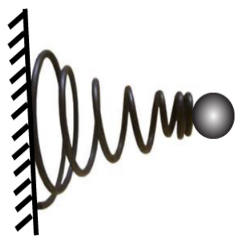


FIG. 1. Resorte no lineal

1-a Proponga una acción que describa este sistema.
1-b Encuente analíticamente las solución de este problema.
1-c Caracterice geométricamente el espacio de fase de manera cualitativa y numérica.

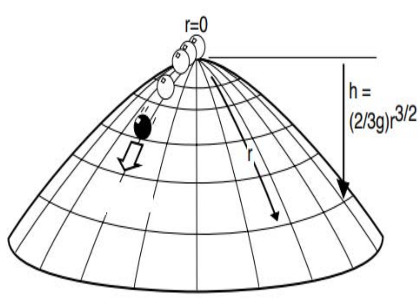


FIG. 2. Domo axialmente simétrico.

2) Ecuaciones de Newton no-deterministas. Considere una masa en el domo axialmente simétrico mostrado en la figura 2 que posee una coordenada radial r inscrita en su superficie (puede pensar en r como la distancia recorrida caminando sobre el domo, como muestra la figura), la altura medida desde la punta del domo hacia abajo viene dada por $h = (\frac{2}{3g})r^{3/2}$.

2-a Muestre que existen dos soluciones distintas asociadas a las condiciones iniciales $r(0) = 0$ y $\dot{r}(0) = 0$. Considere sólo trayectorias radiales.

2-b Si hizo bien la parte a) notará que una de las dos soluciones es 'patológica' (mencione cual es esa 'patológica'). Muestre, sin embargo, que la primera ley de Newton se cumple satisfactoriamente para ambas soluciones.

2-c Usando su intuición establezca algún criterio para decidir por una de las soluciones. No obstante, diga por qué colocar un criterio adicional no es correcto. Usando que la segunda ley de Newton es invariante ante la transformación $t \to -t$ diga por qué la solución 'patológica' es de hecho físicamente plausible.

3)Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada: Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explícitamente del grado de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\mathrm{L}(q, q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} \equiv \frac{d^l q(t)}{dt^l}$, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros.

3-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento obtenida al minimiza la acción generada por este lagrangeano?

3-b ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

4) Lagrangeano para un sistema mecánico: A partir de las ecuaciones de Newton que describen un sistema mecánico que tiene N-variables cartesianas y N-n restricciones. Usando desplazamientos virtuales que respetan las restricciones, Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que el lagrangeano para un sistema mecánico tiene la forma

$$\mathrm{L} = T - V$$

donde T es la energía cinetica y V es la energía potencial.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea XIV
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1) Partícula en un campo dipolar: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo externo dipolar, el cual es descrito por el potencial

$$V(r) = \frac{k\cos\theta}{r},$$

donde $\{r, \theta\}$ coordenadas radial y angular en esféricas, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento..

2) Campo magnético constante: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo magnético constante $\vec{B}$, el cual es descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(\left(P_x + \frac{eB}{c}y\right)^2 + P_y^2 + P_z^2\right),$$

donde $\{e, c, B\}$ son la carga eléctrica de un electron, la velocidad de la luz, constante asociada a la intensidad del campo magnético, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento.

Tarea XIII
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1) Teorema de Poisson: Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H(q^1, q^2, P_1, P_2) = q^1 P_1 - q^2 P_2 - a(q^1)^2 + b(q^2)^2,$$

donde a y b son constante.

1-a Muestre que las tres siguientes cantidades son conservadas

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{p_2 - bq^2}{q^1}, \\ f_2 &= q^1 q^2, \\ f_3 &= q^1 e^{-t}, \end{aligned}$$

1-b Estas constantes de movimientos son funcionalmente independientes

1-c Encuentre el número máximo de constantes.

2) Sólido rígido (la dinámica de un cuerpo giratorio): Las ecuaciones de movimiento que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3, \\ I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2, \end{aligned}$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y I_i es el momento de inercia con respecto al eje principal i del sólido rígido bajo estudio.

¿Estas ecuaciones son lagreangeanas? Y si lo son caracterice el lagrangeano que describe este sistema (INDICACION: varaciones de Poincaré).

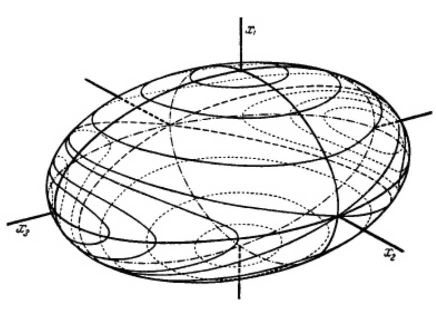


FIG. 1. Espacio de fase de un sólido rígido

3) Algebra de momentos angulares Usando las propiedades de las variables conjudades en los paréntesis de poisson. Muestre que

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

donde L_i es la i-esima componente del momento angular $\vec{L}$, ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-civita, es decir, el tensor es 1 cuando los indices están ordenados en forma cíclica, -1 cuando estan en forma anti-cíclica y cero cuando se repite al menos un indice. Además muestre que se satisface

$$\{\vec{L}^2, \vec{L}\cdot\vec{n}\} = 0,$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario.

L_z es el generador infinitesimal de rotaciones en el espacio. Cuál es el efecto de este generador sobre las variables momentun generalizadas.

4) Laser (Maxwell y Bloch): La descripción semiclásica del láser se basa en la interacción autoconsistente del campo electromagnético con un medio activo dentro de una cavidad óptica. El campo eléctrico se describe clásicamente (por las ecuaciones de Maxwell) y la materia como conjunto de átomos que posee dos niveles de energía cuantizados; términos fenomenológicos se añaden para completar la descripción. El sistema es descrito por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \kappa\frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= -\gamma_\perp \frac{\partial P}{\partial t} - (\gamma_\perp^2 + (1+\delta)^2)P - \mu^2 N E, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_\parallel (N - N_0) + E\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma_\perp P\right), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $E(x,t), P(x,t), N(x,t)$ son respectivamente el campo eléctrico, la polarización y la inversión de población y $\{\kappa, \gamma_\perp, \gamma_\parallel, N_0, \delta, \mu\}$ son parámetros que caracterizan la dinámica de este sistema. x es la dirección de propagación del campo eléctrico

Muestren que las ecuaciones anteriores sin disipación ($\kappa = \gamma_\perp = \gamma_\parallel = 0$) son Hamiltonianas y caracterice el paréntesis de Poisson.

Tarea XII
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1- Péndulo de Foucault: considere un péndulo ideal de largo l y masa puntual m, bajo el efecto del campo gravitacional constante g y rotación Ω del planeta en el cual se encuentra, el cual se ilustra en la imagen (suponga que el planeta es de dimensiones similares a la tierra).

FIG. 1. Péndulo de Foucault.

1-a) Muestre que la posición vertical es un equilibrio y caracterize su estabilidad en el sentido de Lyapunov cuando uno modifica la rotación del planeta (parámetro de control).

1-b) En el caso de considerar fricción húmeda, muestre como se modifica el estudio anterior pero ahora utilizando el sentido de estabilidad de asintótica.

2) Sistema Hamiltoniano: considere una partícula moviéndose en un plano, dinámica bidimensional, bajo la influencia de un potencial generalizado $V(r, \dot{r})$, el cual depende explícitamente de la velocidad,

$$V = \frac{1 + \dot{r}^2}{r},$$

donde r es la distancia radial al origen.

2-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.

2-b Analice la conservación de momento angular.

2-c Estudie el espacio de fase de este problema y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

3) Partícula cargada: Considere una partícula de masa m y carga e, la cual esta bajo la influencia de un campo electromagnético. Esta partícula esta descrita por el Lagrangeano

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^\beta \dot{q}^\beta - e\phi(q,t) + e\dot{q}^\beta A_\beta(q,t),$$

donde q es la posición a de la partícula, $\phi(q,t)$ y $A_\beta(q,t)$ son el potencial eléctrico y el potencial vectorial magnético.

3-a Encuentre Hamiltoniano que describe este sistema.

3-b Encuentre las ecuaciones de movimiento (Ecuaciones de Hamilton) e interprete los términos que obtenga.

4) Identidad de Jacobi: Los paréntesis de Lagrange satisfacen la siguiente identidad

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\{x^b, x^c\} + \frac{\partial}{\partial x^c}\{x^a, x^b\} + \frac{\partial}{\partial x^b}\{x^c, x^a\} = 0.$$

donde $x^\mu = (\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$. Demuestre esta propiedad.

fcfm Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea XI
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1-Pequeñas oscilaciones: considere un torna mesa que gira muy rápido entorno al eje $\overline{OA}$ (ver figura) con velocidad angular Ω, si sobre el torna mesa se cuelgan dos péndulos idénticos de masas m y largos l, separados a una distancia L y a su vez conectados con un resorte de largo natural L y constante elástica k (ver figura). Notar que el punto O esta justo a una distancia simétrica con respecto a los péndulos

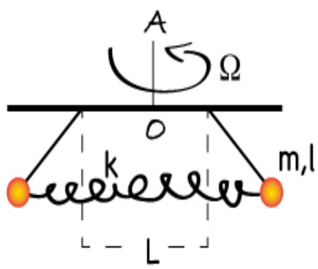


FIG. 1. Péndulos girando en una mesa giratoria.

1-a) Calcule el lagrangeano del sistema, para Ω grande muestre que el sistema tiene equilibrio estable donde los péndulos no son verticales.

1-b) Calcule las frecuencias y modos propios de oscilación del sistema. Interprete a que soluciones corresponden esos modos.

1-c) Analice el limite $\Omega \to \infty$ y comente sus resultados.

2-Péndulo de Andronov Modificado: Un alambre con forma parabólica caracterizado por una concavidad α, gira con respecto a la vertical con una velocidad angular constante ω. Sobre el alambre se desliza un péndulo ideal de largo l y masa m sin fricción (ver figura).

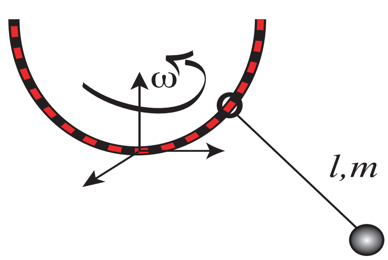


FIG. 2. Péndulo de Andronov modificado.

2-a Encuentre la acción que caracteriza el movimiento de la masa m.

2-b Cacule las ecuaciones de movimiento que describe este sistema.

2-c Encuentre los equilibrios del sistema, como función de los parámetros, y por medio de pequeñas oscilaciones caracterice su estabilidad.

3 Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.

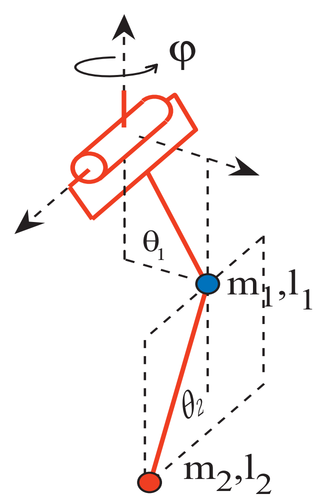


FIG. 3. Péndulo esférico doble restringido

3-a Encuentre el Routhiano y el sistema reducido que describe este sistema.

3-b Calcule los equilibrios relativos de este sistema.

3-c Estudie las pequeñas oscilaciones entorno a los puntos de equilibrio.

Tarea X
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1) Bifurcación Andronov-Hopf-Poincare: Considere el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x,$$
$$\dot{y} = \mu y + x - (x^2 + y^2)y,$$

donde x e y dan cuenta de la posición de una partícula

1-a Muestre que este sistema exhibe una bifurcación cuando μ es variado.

1-b Después de ocurrir la bifurcación el sistema tiene como atractor una solución periódica (ciclo limite), encuentre la expresión analítica de este ciclo limite.

1-c Grafique el espacio de fase del sistema para valores de μ negativos y positivos.

2) Anillo sobre un alambre inclinado: un anillo de masa m desliza sobre un alambre inclinado de largo L y ángulo α, bajo la influencia de un resorte el cual es amarrado al anillo. El otro extremo del resorte esta fijo en el punto O, ver figura. El resorte es caracterizado por una constante el ástica k y largo natural l_0. La altura entre el alambre y el suelo es h, como lo muestra la figura

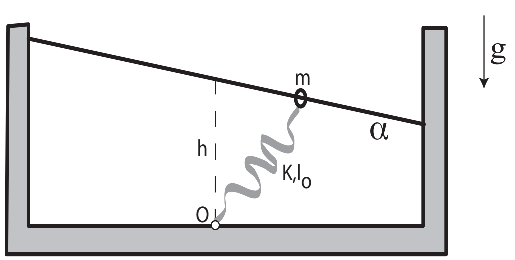


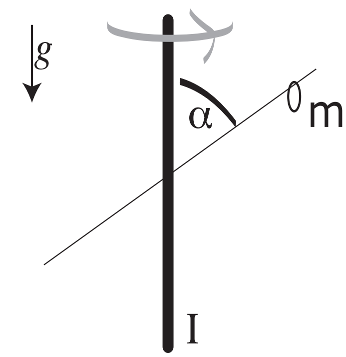
FIG. 1. Bifutrcación Imperfecta.

2-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento del anillo?

2-b Encuentre los equilibrios como función de los parámetros del sistema.

2-c Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico.

3) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 3). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.



3-a Muestre que este sistema presenta una bifurcación estacionaria para su equilibrio realtivo.

3-b Grafique el espacio de fase antes y después de la bifurcación.

4.- Rodar: Sobre un plano inclinado rugoso de ángulo α se coloca un bloque cuadrado homogéneo de masa m, como se muestra en la figura. Dado que el plano es muy rugoso considere que solo puede rodar el bloque y no deslizar.

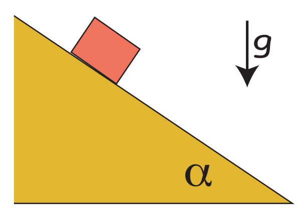


FIG. 2. Plano inclinado.

4-a Encuentre el ángulo cr?́tico al partir del cual el bloque empieza a rodar.

4-b Estudie el espacio de fase de este sistema para distintos ángulos α. Grafique cualitativamente las diferentes trayectorias.

Tarea IX
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura 1), bajo la influencia de un campo gravitacional constante g. El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.

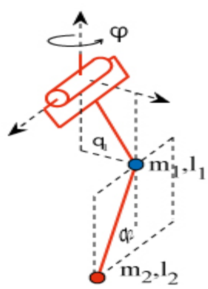


FIG. 1. Péndulo esférico doble con restriciones.

1-a Muestre que los péndulos verticales son un equilibrio del sistema.

1-b ¿Cuál es el lagrangeano cuadrático que caracteriza este equilibrio?

1-c Caracterice los modos propios de las pequeñas oscilaciones y escriba la solución general de este sistema para ángulos pequeños.

2) Ecuaciones de Euler: las ecuaciones que describen un soólido rígido libre fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3,$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3,$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2,$$

En partícular estas ecuaciones describen la dinámica de un Boomerang en su sistema solidario de ejes principales (ver figura 2).

2-a Encuentre los puntos de equilibrio.

2-b Estudie la estabilidad de estos puntos.

2-c Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico.

3) Péndulo de Tap-Thomson Una barra de longitud a está restringida a tener uno de sus extremos fijo al origen de coordenadas (ver figura 3). En el otro extremo una barra de longitud b puede rotar sobre su punto medio,

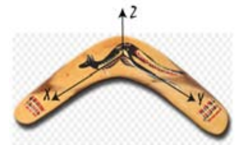


FIG. 2. Las ecuaciones de Euler describen la dinámica de un Boomerang.

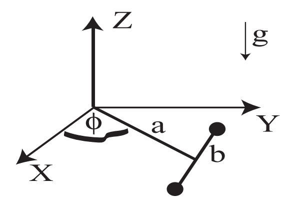


FIG. 3. Péndulo de Tap-Thomson.

pero siempre perpendicular a la barra a. En los extremos de la barra b se sujetan dos masas iguales de magnitud m. Las barras tienen masa despreciable (Péndulo de Tap-Thomson).

3-a Obtenga las ecuaciones de movimiento para el péndulo.

3-b Calcule el Routhiano que caracteriza a este sistema y encuentre el sistema reducido.

3-c Encuentre los puntos de equilibrio y estudie su estabilidad.

4.- Molécula de $C0_2$: un modelo mecánico de la molécula $C0_2$ es consider una partícula de masa M, conectada a dos partículas de masas m por medio de resortes ideales de constante elástica k y largo natural l_0 (ver figura), estas partículas solo se pueden mover en el eje de la molécula.

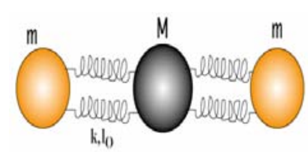


FIG. 4. Modelo mecánico de $CO2$.

Encuentre y caracterice los modos propios de oscilación.

Tarea VIII
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1-Fuerza central: Una partícula se desplaza sin fricción sobre la superficie de un cono vertical de ángulo α bajo la influencia del campo gravitatorio constante (ver figura).

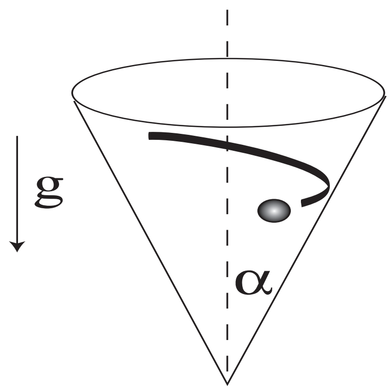


FIG. 1. Problema fuerza central.

1-a Muestre que la dinámica de está partícula es descrita por una fuerza central, encuentre el potencial efectivo de este sistema.

1-b Encuentre la forma integral de la órbita y en el límite $\alpha \to \pi/2$, calcule la forma explícita de está orbita.

1-c En caso de colocar una segunda partícula como se modificaria la dinámica.

2-Potencial de Morse: Empiricamente se ha mostrado que la interacción de moléculas diatómicas es central y se puede describir por (potencial de Morse (P. M. Morse, Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels. Phys. Rev. **34**, 57, [1929])

$$V(r) = D\left(e^{-2\alpha r} - e^{\alpha r}\right)$$

donde los parámetros $\{\alpha, D\}$ son positivos y caracterizan la interacción.

1-a En el caso del movimiento de una partícula unidimensional encuentre explícitamente las trayectoria $x\,(t)$ y caracterice el tipo de soluciones en función de la energía. Caracterize las trayectorias en el espacio de fase.

1-b En el caso que el movimiento es tridimensional, caracterize numericamente la órbita observada.

3) Bifurcación Andronov-Hopf-Poincaré: Considere el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x$$
$$\dot{y} = \mu y + x - (x^2 + y^2)y$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son dos variables dinámicas, μ es el parametro de bifurcación.

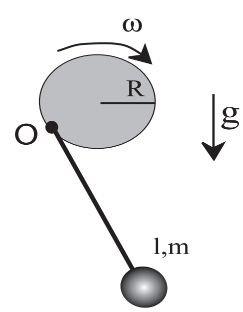
3-a Muestre que este sistema exhibe una bifurcación que engendra una oscilación atractiva cuando μ es variado.

3-b Después de ocurrir la bifurcación el sistema tiene como atractor una solución periódica (ciclo limite), encuentre la expresión analítica de este ciclo limite cerca de la bifurcación.

3-c Grafique el espacio de fase del sistema para valores de μ negativos y positivos.

3-d ¿Este sistema dinámico es Lagrangeano?

4) Péndulo Forzado: considere un péndulo ideal de largo l y masa puntual m, bajo la influencia de un campo gravitacional constante g. El soporte del péndulo, representado por el punto O de la figura, esta soldado a una disco de radio R que gira con una velocidad angular ω, como es ilustrado en la figura.



4-a Encuentre el lagrangeano y la ecuación de movimiento que caracteriza al sistema.

4-b El péndulo en posición vertical es un equilibrio en el sistema movil, para este equilibrio. ¿Cuáles son las frecuencias críticas de disco, para la cual el péndulo en la posición vertical es inestable?

Tarea VII
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

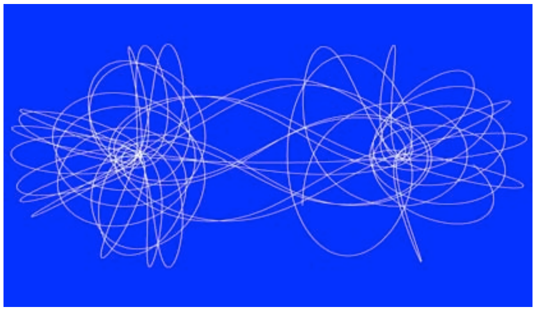


FIG. 1. -Problema de Euler Generalizado.

1.-Problema de Euler Generalizado: Considere la siguiente generalización del problema restringido de tres cuerpos de Euler por medio de realizar la siguiente modificación: los dos cuerpos celestes masivos no realizan una órbita circular sino una de tipo elíptica.

1-a) Encuentre la ecuación de movimiento para el tercer cuerpo pequeño.

1-b) ¿Este sistema tiene una función de Jacobi ? en caso de encontrar una cantidad interprete su significado físico.

1-c) Simule numéricamente las ecuaciones encontradas e ilustre algunas trayectorias. Particularmente, uno de los mayores avances del siglo pasado fue el estudio de Poincaré del problema de tres cuerpos, caracterice el tipo de órbitas e ilustre que son complejas (caóticas).

2 Puntos colineales: Para el problema restringido de tres cuerpos estime analíticamente los puntos colineales—explícite claramente sus supuesto y aproximaciones. Para el caso del Sol y la Tierra estime el valor numérico de estos puntos.

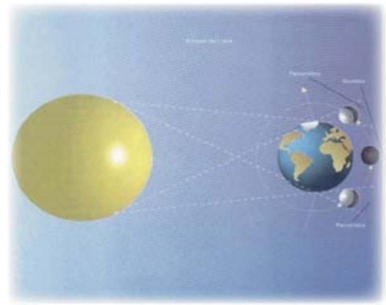


FIG. 2. Sistema Sol-Tierra-Luna.

3) Orbita antifaz: Determine la fuerza central que genera órbitas del tipo "antifaz" como se ilustra en la figura, la cual tiene la forma $r^2 = 2a^2 cos(2\phi)$.

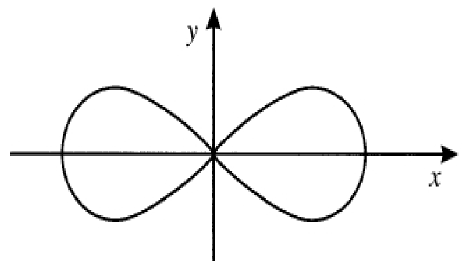


FIG. 3. Órbita antifaz.

4) Problema de fuerzas centrales en el núcleo atómico: la interacción de nucleones al interior de un núcleo esta caracterizado por el potencial de Yukawa (H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan. **17**, 48 (1935))

$$V(r) = -g^2 \frac{e^{-kmr}}{r},$$

Donde g y k son constantes que caracterizan la interacción entre nucleones, r es la distancia entre nucleones, y m es la masa de la partícula (pion de inetrcambio).

4-a Caracterice cualitativamente la trayectorias de este problema de fuerzas centrales

4-b Determine como se modifican las trayectorias después de dar una vuelta.

4-b ¿Se puede caracterizar análiticamente las trayectoria?

Tarea VI
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

FIG. 1. Electromagnetismo.

1) Electromagnetismo: las ecuaciones que describen los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ son las ecuaciones de Maxwell. Muestre que las ecuaciones de Maxwell derivan de un principio de mínima acción. Encuentre la acción y caracterize sus cantidades conservadas con sus respectiva simetría.

2- Precesión de Mercurio:: Uno de los hechos experimentales que contradicen la teoría de la gravedad de Newton es la precesión de la órbita de Mercurio. Su órbita no es una elipse propiamente tal, sino una que precesa con respecto a un eje como se bosqueja en la figura. Para explicar este cambio, se plantea perturbar el potencial de Kepler, $U(r) = -\alpha/r$, por

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^3},$$

con $\beta \ll 1$. Con este nuevo potencial, calcule explícitamente la órbita de Mercurio y la precesión de la velocidad angular (puede usar las aproximaciones que estime conveniente, siempre y cuando estén justificadas). Investigue los valores de la precesión de la órbita y de la velocidad angular, y calcule el valor de β. Esta correción la entrega naturalemente la teorá de la relatividad general de Einstein.

3-Vector de Laplace-Runge-lenz: Para el problema de Kepler–interacción de dos cuerpos celeste–uno encuentra que el vector (Laplace-Runge-Lenz)

$$A = \dot{r} \times L - GM\hat{r},$$

donde r es el vector posición, L es el momento ángular, G constante de gravitacion, M la masa y $\hat{r}$ vector unitario el la dirección del vector posición.

3-a Muestre que este vector es constante.

3-b Encuentre una transformación de simetría que permita obtener esta cantidad conservada.

3-c En el caso que la fuerza no sea proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, muestre que este vector no es conservado.

4) Ecuaciones de Euler del sólido rigido: Las ecuaciones que describen un sólido rígido libre fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

4-a ¿Este sistema es lagrangeano?

4-b Encuentre los puntos de equilibrio.

4-c Estudie la estabilidad de estos puntos.

4-d Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico (INDICACION: conserve la energía).

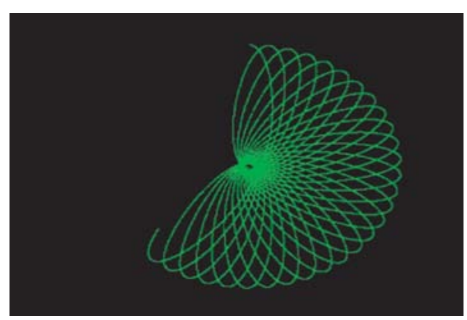


FIG. 2. Orbita de mercurio.

Tarea V
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1) Trompo con pua Fija: Considere un trompo simétrico de masa M, momentos de inercia $I_1 = I_2 = I$, I_3 con respecto a los ejes principales. El centro de Masa se ubica a una distancia l de la púa (ver figura), la cual es representada por el punto O. En el Caso que la púa este fija

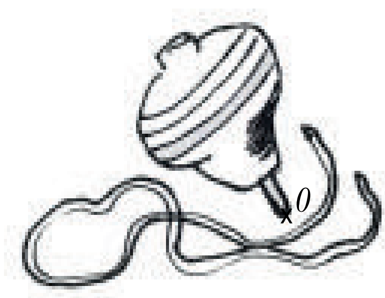


FIG. 1. Trompo.

1-a ¿Cuál es la velocidad angular del trompo?

1-b ¿Cuál es la acción que describe a este sistema?

1-c Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

2- Partícula relativista: Considere una partícula que se mueve a gran velocidad—partícula relativista—la cual es descrita por el siguiente lagrangeano

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \dot{x}^i} - U(x),$$

donde c es la velocidad de la luz.

2-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que describen a este sistema e interprete.

2-b Que forma tendría el lagrangeano si la velocidad es pequeña comparada con la de la luz.

3-Forzamiento: Una partícula de masa m unidimensional sometida a un potencial externo $h(t)$ esta descrita por el lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + xh(t),$$

3-a Encuentre una transformacion no trivial que deja invariante este lagranjeano en el sentido de Noether

3-b Calcule e interprete las cantidades conservadas.

4-Caida libre (problema de Galileo): Una partícula de masa m en la superficie de la tierra aproximadamente esta descrita por el lagreangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

donde $\{x, y\}$ describen el desplazamiento horizontal y vertical respectivamente y g es el parámetro que da cuenta de la gravedad.

Muestre que la transformación infinitesismal

$$x = x'$$
$$y = y' + \sigma$$

deja invariante las ecuaciones de movimiento. Encuentre la cantidad conservada e interprete esta cantidad fisicamente!

FIG. 2. Problema de Galileo.

Tarea IV
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo
Las tareas son personales y se entregan el lunes, respectivo, antes de la clase.

1- Ecuación de Newton covariante: Considere el siguiente langrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U(q^i),$$

donde g^{ij} es la métrica.

1-a) Muestre que las ecuaciones de movimiento toma la forma

$$g_{ij}\left(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{q}^l\dot{q}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial q^i},$$

donde los coeficientes Γ^j_{lm} son los simbolos de Christoffel, definidos por

$$\Gamma^j_{lm} \equiv \frac{1}{2}g^{jk}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k}\right).$$

1-b) Considere el siguiente lagrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = \sqrt{g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j} - U(q^i),$$

calcule las ecuaciones de movimiento y comparelas con aquellas obtenidas en (1-a), comente claramente sus observaciones.

FIG. 1. Cometa.

2-Sistemas disipativos: Considere un cometa en el espacio inter estelar, el cual se puede modelar como una partícula de masa m, bajo la influencia de un potencial externo $U(\vec{r})$ y una fuerza de fricción humeda caracterizada por un coeficiente de fricción α, es decir este cometa esta descrito por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} - \nabla U(\vec{r}),$$

donde ∇ es el gradiente.

2-a) Encuentre la acción que describe este sistema.

2-b) En el caso que el potencial es el gravitacional, que ocurrira con las órbitas parabólicas y elípticas típicamente exhibida por los cometas.

3-Formalismo lagrangiano con campos: En clases a Usted se le enseño el formalismo lagrangiano para partículas puntuales, en este problema deberá trabajar lo mismo pero para campos, esto es, cantidades físicas que dependen no sólo del tiempo sino que del espacio también. Sean $\phi^\mu(\vec{r}, t)$ una colección de campos descritos por la siguiente acción:

$$S[\phi^\mu, \nabla\phi = \partial_{\vec{r}}\phi] = \int \mathcal{L}(\phi^\mu, \nabla\phi^\mu, t, r)dxdt.$$

En este contexto $\mathcal{L}$ se denomina densidad lagrangiana.

3-a Encuentre el análogo de las ecuaciones de Euler-Lagrange para ésta acción.

3-b Demuestre que $\mathcal{L}$ no es único, argumente.

3-c Trabaje el teorema de Noether correspondiente. En particular, establezca el análogo para campos de lo que era una cantidad conservada en el caso de partículas puntuales (corriente conservada).

3-d Considere la siguiente acción para un campo complejo

$$S[A, \bar{A}] = \int\left[\frac{\partial_t A\partial_t\bar{A}}{2} - \frac{\nabla A\nabla\bar{A}}{2} + \frac{m}{2}|A|^2 - \frac{\lambda|A|^4}{4}\right]dxdt,$$

encuentre la ecuación que rige a estos campos y las corrientes conservadas asociadas a simetrías espacio-temporales.

4-Ecuaciones de Newton: Calcule los simboles de Cristoffell y escriba las ecuaciones de Newton en las siguientes cordenadas

4-a Cilíndricas.

4-b Esféricas.

4-c Parabólicas.

Tarea III
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc

Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el viernes, respectivo, antes de la clase.

1) Péndulo de Andronov Considere un aro de radio R, el cual esta lubricado. Un anillo de masa m, puede deslizarse sobre el aro sintiendo el efecto de disipación de tipo húmeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ.

Si el aro es sometido a girar con respecto a la vertical con una velocidad angular Ω (ver figura).

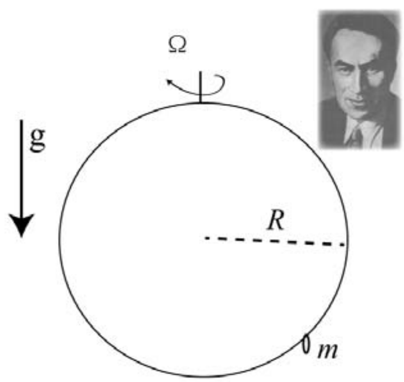


FIG. 1. Péndulo de Andronov.

1-a Escriba un principio variacional que describe este sistema.

1-b Encuentre las ecuaciones de movimiento.

1-c Si uno ignora la disipación, que cantidades conservada tiene el sistema y a que simetrías están relacionadas.

1-d Como función de la velocidad angular caracterice los "equilibrios" del sistema.

2) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 2). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.

2-a Encuentre el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

2-b Encuentre (gráficamente) los puntos de equilibrio del sistema (equilibrios relativos), estudie la estabilidad de éstos.

3) Dinámica de un boya: Considere un boya de material homogénea con forma aproximadamente coníca como se ilustra en la figura, la cual flota en el mar.

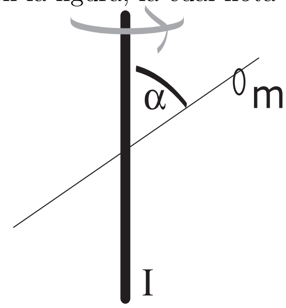


FIG. 2. Vara mágica.

FIG. 3. Boya en mar adentro.

Si el material con que esta hecha la boya es de densidad menor que la del agua del mar y considere que el agua esta en movimiento, modele la ecuación de movimiento de la boya (justifique claramente sus aproximaciones), caracterice la diá mica de la boya por medio de soluciones analíticas y el uso del espacio de fase.

4) Péndulo esférico con disipación: considere un péndulo esférico ideal de largo natural l y masa puntual m. Cuando el péndulo se desplaza siente una fuerza de oposición (disipación) que satisface la ley Stokes $\vec{F} = -\mu\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula y μ coeficiente de disipación o amortiguamiento.

4-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que describe la dinámica del péndulo esférico con disipación.

4-b Encuentre el lagrangeano que describe este sistema.

Tarea II
Mecánica clásica (2018)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Esteban Aguilera & Camila Castillo

Las tareas son personales y se entregan el viernes, respectivo, antes de la clase.

1) Unicidad de Lagangeanos: Muestre que si considera un lagrangeano mas una derivada total, que tiene la forma

$$\mathrm{L}'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \mathrm{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{df(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{dt},$$

las ecuaciones de Euler-lagrange obtenida por cada lagrangeano son las mismas.

Escriba tres lagrangeanos diferentes (no triviales) que describen un péndulo esférico.

2 Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.

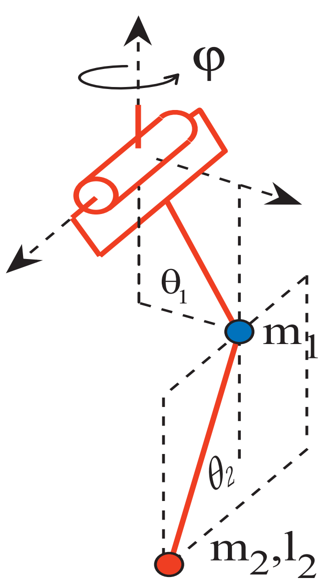


FIG. 1. Péndulo esférico doble, análogo mecánico de un laser.

2-a¿Cuál es el lagrangeano que caracteriza a este sistema?

2-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

2-c ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema e interprte fisicamente los diferentes términos de las ecuaciones de movimiento?

3) Principio de Fermat: La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio: "El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos" (PRINCIPIO DE FERMAT). Si $v(x, y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio (por simplicidad considere el plano $\{x, y\}$).

3-a Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de fermat.

3-b Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuación (Recomendación: A partir del principio de fermat deduzca la ley de Snell, usando esta ley trate de interpretar su resultado).

3-c Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = \alpha y$, donde α es constante ¿Que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?

4) Sistema disipativo: Considere un péndulo plano el cual esta compuesto por una ésfera y cuerda ideal de masa m y largo l (ver Figura 2). Como consecuencia de la presencia del aire este ejerce una fuerza proporcional a la velocidad caracterizada por un coeficiente de amortiguamiento ν, es decir, las ecuación de movimiento del péndulo toma la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta) - \nu\dot{\theta}$$

4-a Encuentre la acción que caracteriza a este sistema.

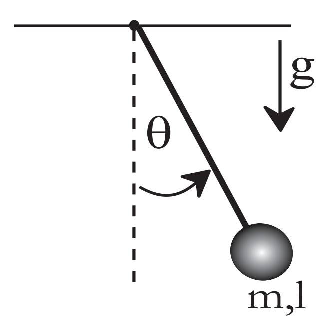


FIG. 2. Péndulo plano con disipación.