Examen
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Tiempo 3:00 hrs, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1-Problema de tres cuerpos: Los satélites troyanos son cuerpos celestes que están influenciados por los dos cuerpos celestes más masivos del sistema solar, Sol y Júpiter. Por lo tanto, uno de estos satélites está bajo la influencia de dos fuerzas centrales, donde el potencial gravitacional es

$$U(r_1, r_2) = -\frac{Gmm_1}{r_1} - \frac{Gmm_2}{r_2}$$

Donde r_1 y r_2 son la distancia radiales al sol y Júpiter respectivamente, m, m_1 y m_2 las masa del satélite, del Sol y Júpiter.

FIG. 1. Satélites troyanos.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción.

2-Lagrangeano de sistemas continuos: Los sistemas continuos están descritos por variables continuas o campos, es decir los sistemas en este caso están descritos por variables indexadas por el tiempo y el espacio $[q(x,t)]$. Considere un sistemas entendido en una dimension espacial, el cual están descrito por la siguiente acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} L\left(q(x,t), q_t, q_x, q_{xx}\right) dt dx,$$

donde q_t y q_x son la derivada temporal y espacial respectivamente y q_{xx} representa el laplaciano del campo q.

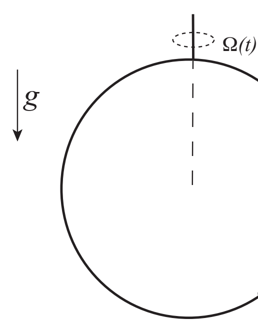
1-a Usando el principio de minima acción, encuentre la ecuación de movimiento para el el campo $q(x,t)$ (Ecuación de Euler-Lagrange generalizada) y especifique que condiciones de borde para el campo considera (INDICACION: Considere las variaciones a extremos fijos y que las derivadas del campo en los extremos espaciales son cero).

1-b Considere una cadena de péndulos, la cual es descrita por el ángulo $\theta(x,t)$ en la posición x y un instante t, de densidad de masa ρ y densidad de acoplamiento κ constante, la cual es descrita por la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \rho g\cos(\theta)\right) dt dx,$$

Usando la ecuación de Euler-Lagrange generalizada deduzca la ecuación de ondas para la cuerda y analice la estabilidad de la cadena vertical $\theta(x,t) = 0$

3) Péndulo de Andronov-Kapitza: Considere un aro de diámetro R y momento de inercia I en la dirección vertical con respecto al centro, sobre el cual se coloca una anillo de masa m que puede deslizarse sin fricción sobre el aro (ver figura).



Si el aro está girando con velocidad angular $\Omega(t) = \Gamma\sin(\omega t)$. En el límite de alta frecuencia ($\omega \to \infty$), encuentre la ecuación que caracteriza este sistema y en función de Γ caracterice los diferentes equilibrios (diagrama de bifurcación).

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Fisica

Control II
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Tiempo 3:00 hrs, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1-Péndulo de Foucault: Considere un péndulo bajo el efecto de la rotación de la Tierra (ω), como se ilustra en la figura.

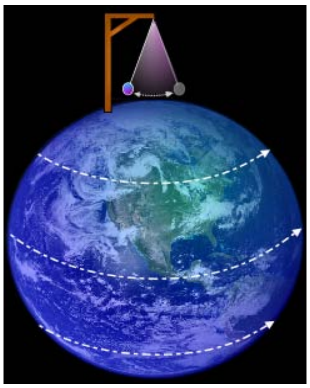


FIG. 1. Péndulo de Foucault.

1-a) Muestre que el sistema es Hamiltoniano y caracterize los parentesis de Possion de este sistema. Encuentre las cantidades conservadas.

1-b) El péndulo vertical es un equilibrio del sistema, si considera disipación humeda (coeficiente de amortiguación λ) caracterize la estabilidad de este equilibrio.

2-Transformaciones Canónicas: Un sistema físico es descrito por las cordenadas canónicas conjugadas $\{q, p\}$.

2-a Muestre que

$$Q = q\cos\theta - \frac{P}{mw}\sin\theta,$$
$$P = mwq\sin\theta + p\cos\theta, \tag{1}$$

es una transformacion canónica. Para esto calcule el parentesis de Poisson $\{Q, P\}_{q,p}$ y encuentre la función generadora de la transcformacón canonica, suponga que es $F_1(q, Q, t)$.

2-b Usando la siguiente transformación de legendre

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + QP$$

muestre que forma ahora toma la trasformación y que relación tiene con la transformación 1.

3-Fórmula de Rutherford: Encuentre la sección eficaz infinitesimal en el caso de un fuerza central gravitacional, caracterizada por el potencial

$$U = \frac{\gamma}{r}$$

donde r es la distancia radial entre el "escateador" y el nucleo de la partícula que engendra el potencial.

Control I
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Tiempo 3:00 hrs, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1-Pequeñas oscilaciones: considere un torna mesa que gira muy rápido entorno al eje $\overline{OA}$ (ver figura) con velocidad angular Ω, si sobre el torna mesa se cuelgan dos péndulos idénticos de masas m y largos l, separados a una distancia L y a su vez conectados con un resorte de largo natural L y constante elástica k (ver figura). Notar que el punto O esta justo a una distancia simétrica con respecto a los péndulos

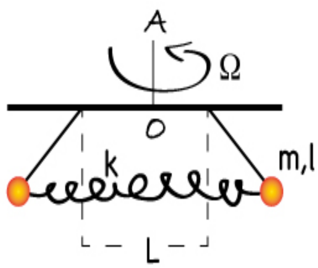


FIG. 1. Péndulos girando.

1-a) Calcule el lagrangeano del sistema, para Ω grande muestre que el sistema tiene equilibrio estable donde los péndulos no son verticales.

1-b) Calcule las frecuencias y modos propios de oscilación del sistema. Interprete a que soluciones corresponden esos modos.

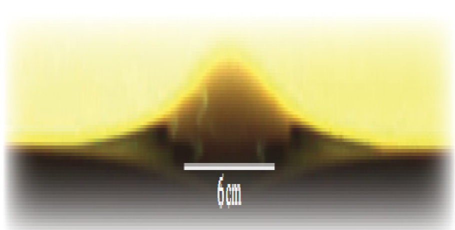


FIG. 2. Soliton hidrodinámico propagativo, cortesía del laboratorio de materia fuera del equilibrio .

2- Sistemas paramétricos: Un canal con un fluido Newtoniano (por ejemplo agua) vibrado verticalmente exhibe formación de patrones y solitones hidrodinámicos no propagativos (ver figura de Soliton hidrodinámico propagativo). Estos comportamientos son descrito por la ecuación de Schrodinger no lineal forzada paramétricamente

$$\partial_t \psi = -i\nu\psi - i|\psi|^2\psi - i\partial_{xx}\psi - \mu\psi + \gamma\bar{\psi},$$

donde $\psi(x,t)$ es un campo complejo que da cuenta del modo transversal, $\bar{\psi}$ es el complejo conjugado, y $\{\nu, \mu, \gamma\}$ son parámetros que caracterizan el sistema físico.

2-a) Encuentre el lagrangeano que describe este sistema y muestre que extremando este uno deduce la ecuación anterior.

1- Partícula relativista: Una partícula de masa m y carga e se mueve a velocidades comparadas a la de la luz (c) bajo la influencia de un campo electromágnetico, su dinámica se describe por la siguiente ecuación

$$\frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt} = -e\vec{\bigtriangledown}\Phi - \frac{e}{c}\left[\vec{\bigtriangledown}(\vec{v}\vec{A}) - (\vec{v}\vec{\bigtriangledown})\vec{A}\right],$$

donde $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, y $\{\Phi, \vec{A}\}$ potencial eléctrico y potencial vector magnético, respectivamente.

1-a) Encuentre el Lagrangeano que describe este sistema y muestre que extremando éste se deduce la ecuación anterior.

1-b) ¿ Que cantidades conservada caracterizan este sistema?

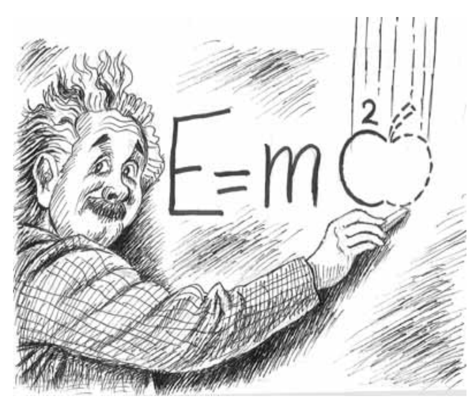


FIG. 3. Lo importante es nunca dejar de cuestionar el mundo que nos rodea.

FCFM Física — Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

Tarea XIV
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Problema de Galileo: Usando el método de Hamilton-Jacobi, considere un cuerpo que cae verticalmente en la superficie de la tierra (considere que la gravedad es constante), descrito por el Hamiltoniano

$$H(P_y, y) = \frac{1}{2m}P_y^2 + mgy.$$

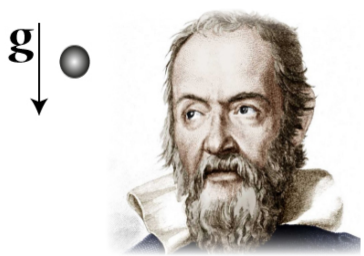


FIG. 1. Problema de Galileo.

Encuentre la Acción S y las ecuaciones de movimiento.

2) Partícula en un campo dipolar: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo externo dipolar, el cual es descrito por el potencial

$$V(r) = \frac{k\cos\theta}{r},$$

donde $\{r, \theta\}$ coordenadas radial y angular en esféricas, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento.

3) Partícula en un campo Kepleriano mas un potencial externo: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo radial kepleriano y un campo constante en una dirección arbitraria, el cual es descrito por el potencial

$$V(r) = \frac{k}{r} - F_0 z,$$

donde $\{r, z\}$ coordenadas radial y vertical, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante

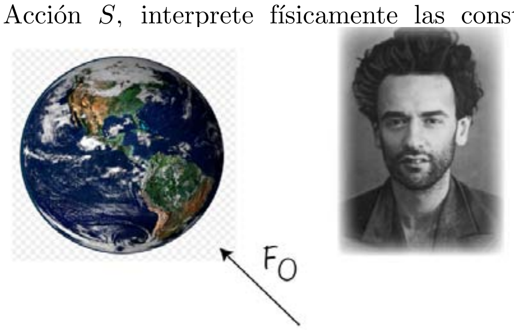


FIG. 2. mmmm!

de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento.

4) Campo magnético constante: Considere una partícula de masa m bajo el efecto de un campo magnético constante $\vec{B}$, el cual es descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(\left(P_x + \frac{eB}{c}y\right)^2 + P_y^2 + P_z^2\right),$$

donde $\{e, c, B\}$ son la carga eléctrica de un electron, la velocidad de la luz, constante asociada a la intensidad del campo magnético, respectivamente.

Usando el método de Hamilton-Jacobi, encuentre la Acción S, interprete físicamente las constante de movimiento que encuentra, y las ecuaciones de movimiento.

Fisica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea XIII
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Oscilador Isotrópico Considere una partícula puntual de masa m, la cual se mueve en el plano xy, bajo la influencia de un resorte isotrópico de constante elástica k y potencial $V(\vec{r}) = k\vec{r}^2/2$ con $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$. Luego el Hamiltoniano que describe el sistema es

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

Introduciendo las cantidades $S_1 = (P_x^2 - P_y^2)/2m + k(x^2 - y^2)/2$, $S_2 = P_x P_y/m + kxy$, $S_3 = \omega(xP_y - yPx)$ con $\omega = \sqrt{k/m}$.

Muestre que:

1-1) las cantidades S_i son cantidades conservadas, es decir $\{H, S_i\} = 0$. Interprete su sentido físico.

1-2) $\{S_i, S_j\} = \varepsilon^{lij} 2\omega S_l$ donde ε^{lij} es el tensor de Levi-Vivita.

1-3) $H^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

2) Transformación canonica: Considere la siguiente transformación de coordenadas de variables conjugadas

$$Q = -p, \tag{1}$$
$$P = q + Ap^2, \tag{2}$$

donde $\{q, p\}$ son las variables conjugadas originales, A una constante.

2-1) Encuentre el generador de la transformación canó-nica $F_1(q, Q)$.

2-2) Mediante la relación $F_2(q, P) = F_1(q, Q) + QP$, use este nuevo generador, analice las nuevas coordenadas e interprete la transformación.

2-3) Considere el Hamiltoniano de una partícula moviendose verticalmente en un campo gravitatorio constante (problema de Galileo)

$$H(q, p) = \frac{P^2}{2m} + mgq.$$

Utilizando la libertad de A, encuentre el Hamiltoniano $K(Q, P)$ que es cíclico en una variable. Utilizando las soluciones temporales en el sistema Hamiltoniano simple construya la soluciones del problema original

3) Problema de n cuerpos: La dinámica de interacción entre n partículas es descrita por el Hamiltoniano,

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1,j=1}^{n} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

donde V_{ij} es el potencial de inetracción entre la partícula i y la partícula j. La dinámica vista desde un sistema de coordenadas no inercial que acelera uniformemente genera que las coordenadas en este sistema tengan la forma

$$\vec{Q}_i = \vec{r}_i - \frac{\vec{a}}{2}t^2.$$

3-1) Muestre que uno puede conectar estos dos sistemas de representación por medio de una transformación canonica del tipo $F(\vec{r}_i, \vec{P}_i)$.

3-2) Escogiendo apropiadamente la transformación canónica muestre que el nuevo Hamiltoniano $K(\vec{Q}_i, \vec{P}_i)$ puede tener la misma forma que el Hamiltoniano original $H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ mas un termino efectivo que da cuenta de una campo constante externo.

4) Oscilador anarmónico y forma normal: Considere la siguiente transformación cerca de la identidad

$$q = Q + aQ^2 + bQP + cP^2, \tag{3}$$
$$p = P + dQ^2 + eQP + fP^2, \tag{4}$$

donde $\{a, b, c, d, e, f\}$ son parámetros pequeños de orden $\epsilon \ll 1$.

4-1) Encuentre que relaciones deben satisfacer los parámetros $\{a, b, c, d, e, f\}$ para que las transformaciones sean canónicas al orden lineal en ϵ.

Un oscilador ligeramente anarmónico esta descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 + \epsilon\beta q^3.$$

4-2) Usando la transformación canónica anterior (formulas 3 y 4), escogiendo adecuadamente los parámetros anteriores, muestre que el nuevo Hamiltoniano tiene la forma (forma normal)

$$K(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 Q^2 + O(\epsilon^2),$$

Interprete este resultado.

4-3) Usando las soluciones del sistema Hamiltoniano $K(Q, P)$ y usando la transformación canónica encuentre solución del problema anarmónico.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Física

Tarea XII
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Algebra de momentos angulares Usando las propiedades de las variables conjudades en los paréntesis de poisson. Muestre que

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

donde L_i es la i-esima componente del momento angular $\vec{L}$, ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-civita, es decir, el tensor es 1 cuando los indices están ordenados en forma cíclica, -1 cuando estan en forma anti-cíclica y cero cuando se repite al menos un indice. Además muestre que se satisface

$$\{\vec{L}^2, \vec{L} \cdot \vec{n}\} = 0,$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario.

L_z es el generador infinitesimal de rotaciones en el espacio. Cuál es el efecto de este generador sobre las variables momentun generalizadas.

2) Hilo Magnético: Considere un hilo magnético con anisotropía positiva el cual es forzado con un campo magnético externo, ortogonal al hilo y compuesto por una componente constante y otra oscilatoria, tal como se ilustra en la figura. Este sistema físico puede ser interpretado como una cadena de osciladores no lineales forzados paramétricamente. Cerca de su resonancia paramétrica la dinámica de la magnetización en la dirección del hilo magnético es descrita por la amplitud

$$\frac{dA}{dt} = -i\nu A - i|A|^2 A - \mu A + \gamma \bar{A},$$

donde ν es el desincorización entre la frecuencia de forzaje y el doble de la frecuencia de prececión, μ da cuenta de la disipación y γ es la amplitud de forzamiento magnético

Estudie los estados de equilibrio de este sistema, como función de los parámetros $\{\nu, \mu, \gamma\}$ y caracterice cuidadosamente todas las bifurcaciones.

3) Laser: La descripción semiclásica del láser se basa en la interacción auto-consistente del campo electromagnético con un medio activo dentro de una cavidad óptica. El campo eléctrico se describe clásicamente (por las ecuaciones de Maxwell) y la materia como conjunto de átomos que posee dos niveles de energía cuantizados; términos fenomenológicos se añaden para completar la descripción. El sistema es descrito por

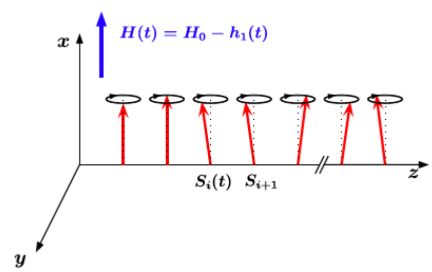


FIG. 1. Hilo magnético.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial E}{\partial t}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= -\gamma_\perp \frac{\partial P}{\partial t} - (\gamma_\perp^2 + (1+\delta)^2) P - \mu^2 N E, \\
\frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_\parallel (N - N_0) + E \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma_\perp P \right),
\end{aligned} \tag{1}$$

donde $E(x,t), P(x,t), N(x,t)$ son respectivamente el campo eléctrico, la polarización y la inversión de población y $\{\kappa, \gamma_\perp, \gamma_\parallel, N_0, \delta, \mu\}$ son parámetros que caracterizan la dinámica de este sistema. x es la dirección de propagación del campo eléctrico

Muestren que las ecuaciones anteriores sin disipación ($\kappa = \gamma_\perp = \gamma_\parallel = 0$) son Hamiltonianas y caracterice el paréntesis de Poisson.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea XI
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Trompo con púa fija: Considere un trompo simétrico con púa fija, es decir, el momento de inercia en la dirección vertical es distinto.

1-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema. Es recomendable usar los ángulos de Euler.

1-b Encuentre las cantidades conservadas del trompo con púa fija este y deduzca el Routhiano que caracteriza la dinámica de este sistema. Muestre que el sistema es integrable.

1-c Estudie el espacio de fase de este sistema reducido y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

1-d Usando el teorema de Hamilton-Noether encuentre las transformaciones infinitesimales que dejan invariante la dinámica del trompo simétrico con púa fija.

2) Identidad de Jacobi: Los paréntesis de Lagrange satisfacen la siguiente identidad

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\{x^b, x^c\} + \frac{\partial}{\partial x^c}\{x^a, x^b\} + \frac{\partial}{\partial x^b}\{x^c, x^a\} = 0.$$

donde $x^\mu = (\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$. Demuestre esta propiedad.

3) Confución de frecuencia: cuando los parámetros de un sistema físico son modificados dos frecuencias del espectro de una solución estable pueden colisionar y generar una inestabilidad. Esta inestabilidad es denominada bifurcación de confusión de frecuencia y el parámetro que genera este fenomeno es denominado parametro de bifurcación. La dinámica de la amplitud de estos modos criticos es descrita por la ecuación

$$\partial_{tt}A = \epsilon A + i\delta\partial_t A - \alpha|A|^2 A, \tag{1}$$

donde $A(t)$ es una amplitud compleja, ϵ es parámetro de bifircación, δ da cuenta de efectos giroscopios entre los modos y α es un parámetro positivo que da cuenta de la respuesta no lineal de los modos.

¿Este sistema es Hamiltoniano? Encuentre el Hamiltoniano y caracterice los parentesis de poisson de este sistema.

4) Soluciones exactas de las ecuaciones de Euler para un sólido rígido: Las ecuaciones de movimiento que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y I_i es el momento de inercia con respecto al eje principal i.

Encuentre analícamente la solución de este estas ecuaciones para cualquier condición inicial (ver espacio de fase).

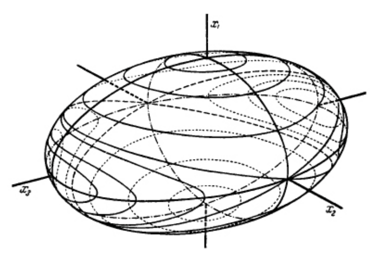


FIG. 1. Espacio de fase de un sólido rígido

Tarea X
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Sistema Hamiltoniano: considere una partícula moviéndose en un plano, dinámica bidimensional, bajo la influencia de un potencial generalizado $V(r,\dot{r})$, el cual depende explícitamente de la velocidad,

$$V = \frac{1+\dot{r}^2}{r},$$

donde r es la distancia radial al origen.

1-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.

1-b Analice la conservación de momento angular.

1-c Estudie el espacio de fase de este problema y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

2) Partícula cargada: Considere una partícula de masa m y carga e, la cual esta bajo la influencia de un campo electromagnético. Esta partícula esta descrita por el Lagrangeano

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^\beta \dot{q}^\beta - e\phi(q,t) + e\dot{q}^\beta A_\beta(q,t),$$

donde q es la posición a de la partícula, $\phi(q,t)$ y $A_\beta(q,t)$ son el potencial eléctrico y el potencial vectorial magnético.

2-a Encuentre Hamiltoniano que describe este sistema.

2-b Encuentre las ecuaciones de movimiento (Ecuaciones de Hamilton) e interprete los terminos que obtenga.

3) Ecuaciones de Euler: Las ecuaciones de movimiento que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3\\
I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3\\
I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2
\end{aligned}$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y I_i es el momento de inercia con respecto al eje principal i.

3-a ¿Este sistema es lagrangeano?

3-b Encuentre los puntos de equilibrio.

3-c Estudie la estabilidad de estos puntos.

3-e Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico

4) Modelo Maxwell-Bloch El modelo más exitoso que da cuenta de la dinámica del laser es el modelo de Maxwell Bloch, en el cual los campos electromagnéticos son tratados clásicamente y los átomos o moléculas son descrito cuanticamente como un sistema de dos niveles. Las ecuaciones que describen la envolvente del campo eléctrico $E(t)$, polarización $P(t)$, y la el número de átomos o moléculas excitadas $N(t)$ son

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \kappa(P-E),\\
\dot{P} &= \gamma_{\parallel}\left(EN - P\right),\\
\dot{N} &= \gamma_{\perp}\left(N_o - N - \mu EP\right).
\end{aligned}$$

Donde κ es la tasa de decaimiento de la cavidad, $\gamma_{\parallel}$ es el decaimiento asociado a la colisión entre moléculas y $\gamma_{\perp}$ es el decaimiento espontáneo. N_o es el parámetro que describe la fuente de átomos o moléculas excitadas.

FIG. 1. Laser

Encuentre los puntos de equilibrio y estudie las bifurcaciones exhibidas por el laser.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea IX
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1- Péndulo de Foucault: considere un péndulo ideal de largo l y masa puntual m, bajo el efecto del campo gravitacional constante g y rotación Ω del planeta en el cual se encuentra, el cual se ilustra en la imagen (suponga que el planeta es de dimensiones similares a la tierra).

FIG. 1. Péndulo de Foucault.

1-a) Muestre que la posición vertical es un equilibrio y caracterize su estabilidad en el sentido de Lyapunov cuando uno modifica la rotación del planeta (parámetro de control).

1-b) En el caso de considerar fricción húmeda, muestre como se modifica el estudio anterior pero ahora utilizando el sentido de estabilidad de asintótica.

2) Bifurcación Andronov-Hopf-Poincaré: Considere el siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x,$$
$$\dot{y} = \mu y + x - (x^2 + y^2)y,$$

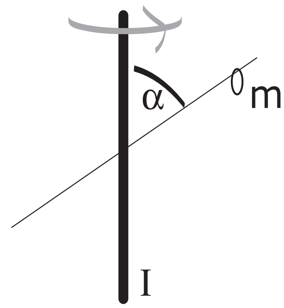
donde $\{x(t), y(t)\}$ variables que dan cuenta del espacio de fase de un oscilador no lineal y μ es un parametro de control.

2-a Muestre que este sistema exhibe una bifurcación de Andronov-Hopf-Poincaré para la solución $(x, y) = (0, 0)$ cuando μ es variado.

2-b Después de ocurrir la bifurcación el sistema tiene como atractor una solución periódica (ciclo limite), encuentre la expresión analítica de este ciclo limite.

2-c Grafique el espacio de fase del sistema para valores de μ negativos y positivos.

3) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.



3-a Muestre que este sistema presenta una bifurcación estacionaria para su equilibrio realtivo.

3-b Grafique el espacio de fase antes y después de la bifurcación.

4- Anillo sobre un alambre Inclinado: un anillo de masa m desliza sobre un alambre inclinado de largo L y ángulo α, bajo la influencia de un resorte el cual es amarrado al anillo. El otro extremo del resorte esta fijo en el punto O, ver figura. El resorte es caracterizado por una constante elástica k y largo natural l_o. La altura entre el alambre y el suelo es h, como lo muestra la figura.

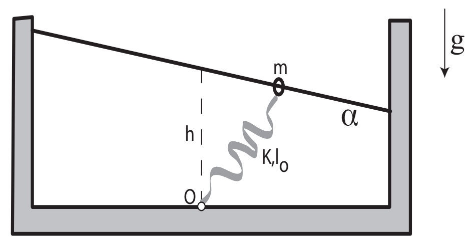


FIG. 2. Bifutrcación Imperfecta

4-a ¿ Cuál es la ecuación de movimiento del anillo?.

4-b Encuentre los equilibrios como función de los parámetros del sistema (k; l_0; m; h, α y mu).

4-c Si uno considera que el movimiento del anillo esta sobre amortiguado, es decir, el alambre esta lubricado por lo tanto sobre el anillo se ejerce una fuerza viscosa ($F = -\mu v$, v es la velocidad). Clasique la estabilidad de los puntos de equilibrio como función de h.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea VIII
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta
Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

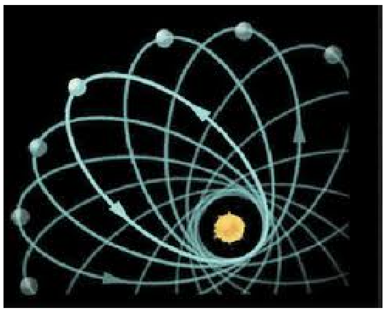


FIG. 1. Órbita de Mercurio.

1- Precesión de Mercurio: Uno de los hechos experimentales que contradicen la teoría de la gravedad Universal de Newton es la precesión de la órbita de Mercurio. Su órbita no es una elipse propiamente tal, sino una curva que precesa con respecto a un eje. Para dar cuenta de esta órbita, uno puede plantear perturbar el potencial de Kepler con un término extra de la forma

$$u_{extra}(x) = \frac{\beta}{r^3}$$

Con este potencia modificadol, calcule explicitaménte la órbita de Mercurio y la precesión de la velocidad angular (puede usar las aproximaciones que estime conveniente, siempre y cuando estén claramente justificadas). Investigue los valores de la precesión de la órbita y de la velocidad angular, en función del valor de β. Es importante notar que esta correción la entrega naturalmente la teoría de la relatividad de Einstein.

2.-Problema de Euler Generalizado: Considere la siguiente generalización del problema restringido de Euler por medio de realizar la siguiente modificación: los dos cuerpos celestes masivos no realizan una órbita circular sino una de tipo elíptica.

2-a) Encuentre la ecuación de movimiento para el tercer cuerpo pequeño.

2-b) ¿Este sistema tiene una función de Jacobi ? en caso de encontrar una cantidad interprete su significado físico.

2-c) Simule numéricamente las ecuaciones encontradas e ilustre algunas trayectorias. Particularmente, uno de los mayores avances del siglo pasado fue el estudio de Poincaré del problema de tres cuerpos, caracterice el tipo de órbitas e ilustre que son caóticas.

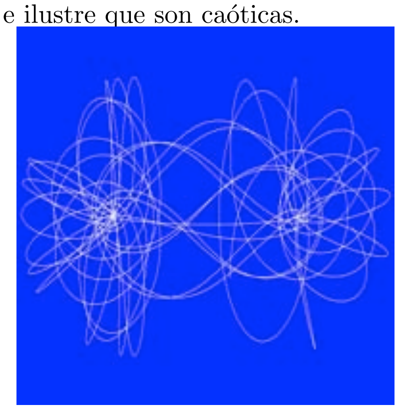


FIG. 2. -Problema de Euler Generalizado.

3.- Campos magnéticos: Calcule la sección eficaz de scattering en el caso de una partícula cargada que siente un campo magnético $\vec{B}_o$ solo al interior de una esfera de radio a.

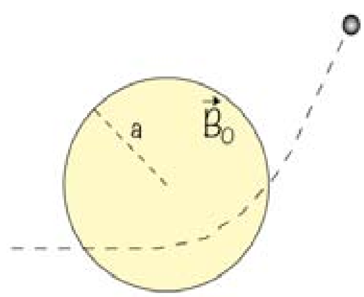


FIG. 3. Partícula que cruza una esfera con campo magnético.

Fisica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea VII
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1) Péndulo de Andronov: Considere un aro de radio R el cual puede girar con respecto al pivote vertical en el punto A (ver Figura). El aro no tiene momento de inercia con respecto al eje vertical ($I = 0$). Sobre el aro hay un anillo de masa m, el cual puede deslizarse sin roce sobre el aro (ver figura).

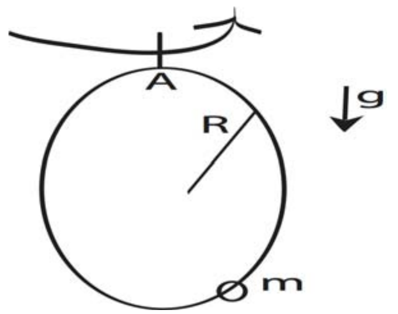


FIG. 1. Péndulo de Andronov

1-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que caracterizan este sistema.

1-b Para los distintos valores del momento angular, encuentre los equilibrios relativos y explique como aparecen y desaparecen como función del momento angular.

1-c Estudie la estabilidad de estos equilibrios relativos.

1-d En caso que el aro este lubricado, que pasa con la estabilidad de los puntos de equilibrio. Dibuje el espacio de fase.

FIG. 2. Eléctromagnetismo.

2) Electromagnetismo: las ecuaciones que describen los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ son las ecuaciones de Maxwell (cf. figura 2). Muestre que las ecuaciones de Maxwell derivan de un principio de mínima acción. Encuentre la Acción de los campos eléctricos y caracterice sus cantidades conservadas con sus respectiva simetría continuas asociadas.

3) Partícula súper no Galileano: Considere una partícula descrita por un Lagrangeano

$$L[\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}, \vec{r}] = \alpha \frac{\dot{\vec{v}}^2}{2} + m\frac{\vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}),$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del vector $\vec{r}$ en un sistema de coordenadas inercial. Si esta partícula es descrita en un sistema de coordenadas no inercial el cual es descrito por un vector de traslación $\vec{R}(t)$ y velocidad ángular $\vec{\Omega(t)}$. Encuentre el lagrangeano y ecuaciones de movimientos que describe esta partícula desde el sistema no inercial. Interprete físicamente los términos de la ecuación de movimiento.

4.- Scattering de potenciales centrales: Calcule la sección eficaz de scattering diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ y total σ de una partícula en un potencial central $U(r) = \alpha/r^n$, donde α y n son parámetros arbitrarios que caracterizan el potencial.

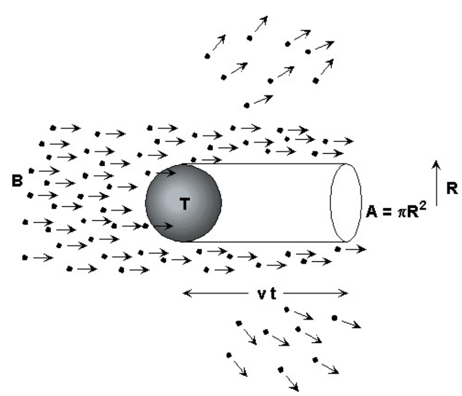


FIG. 3. Scattering de potenciales centrales.

Tarea VI
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1-Sistemas gravitacional disipativo: Considere un cometa en el espacio inter estelar, el cual se puede modelar como una partícula de masa m, bajo la influencia de un potencial externo $U(\vec{r})$ y una fuerza de fricción humeda caracterizada por un coeficiente de fricción α, es decir este cometa esta descrito por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} - \nabla U(\vec{r}),$$

donde ∇ es el gradiente.

1-a) Encuentre la acción que describe este sistema.

1-b) En el caso que el potencial sea kepleriano

$$U(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{|r|},$$

que ocurrirá con las órbitas parabólicas tipicamente exhibida por los cometas.

2-Potencial de Morse: Empirimente se ha mostrado que la interacción de moléculas diatómicas es central y se puede describir por el potencial de Morse (P. M. Morse, Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels. Phys. Rev. 34, 57, 1929)

$$V(r) = D\left(e^{-2\alpha r} - e^{\alpha r}\right),$$

donde los parámetros $\{\alpha, D\}$ son positivos y caracterizan la interacción. Figura 1 ilustra el potencial.

2-a En el caso del movimiento de una partícula unidimensional encuentre explicitamente las trayectoria $x(t)$ y carcterize el tipo de soluciones en funcion de la energía. Caracterize las trayectorias en el espacio de fase.

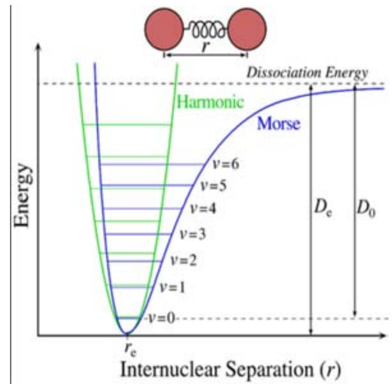


FIG. 1. Potencial de Morse.

2-b En el caso que el movimiento es tridimensional, caracterice analiticamente y numericamente la órbita observada.

3-Vector de Laplace-Runge-lenz: Para el problema de Kepler—interacción de dos cuerpos celeste—uno encuentra que el vector (Laplace-Runge-Lenz)

$$A = \dot{r} \times L - GM\hat{r},$$

donde r es el vector posición, L es el momento ángular, G constante de gravitacion, M la masa y $\hat{r}$ vector unitarion el la dirección del vector posición.

3-a Muestre que este vector es constante.

3-b Encuentre una transformación de simetría que permita obtener esta cantidad conservada.

3-c en el caso que la fuerza no sea proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, muestre que este vector no es conservado.

4-Sol-Tierra-Luna: Muestre que el potencial efectivo del sistema luna tierra tratado como un solo objeto bajo el campo gravitacional del Sol puede ser aproximado por un potencial

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\delta}{r^3} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

donde r es la distancia del Sol al centro de masa de tierra y la luna.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea V
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales, justifique claramente sus resultados y argumentos.

1.- Ecuaciones de Newton en coordenadas tradicionales: Calcule los simbolos de Cristoffell y escriba las ecuaciones de Newton en las siguientes coordenadas

1-a Cilíndricas.
1-b Esféricas.
1-c Parabólicas.
1-d conicas

2.- Lagrangiano covariante: Considere el siguiente Lagrangeano para una partícula puntual escrito en coordenadas generalizadas $\{\vec{q}, \dot{\vec{q}}\}$,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} g_{ij}(\vec{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j - U(\vec{q}),$$

donde m es la masa, $g_{ij}(\vec{q})$ la métrica y $U(\vec{q})$ potencial.

2-a Encuentre la ecuacin que describe este sistema y comente su resultado.

2-b En el caso de modificar el lagrangeano en la siguiente forma.

$$\mathcal{L} = mc\sqrt{c^2 - g_{ij}(\vec{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j} - U(\vec{q}),$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Encuentre la ecuacin que describe este sistema y comente su resultado.

3.- Caida libre: Una partícula de masa m en la superficie de la tierra aproximadamente esta descrita por el lagreangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

donde $\{x, y\}$ describen el desplazamiento horizontal y vertical respectivamente y g es el parámetro que da cuenta de la intensidad del campo gravitacional.

Muestre que la transformación infinitesismal

$$x = x'$$
$$y = y' + \epsilon$$

donde $\epsilon \ll 1$, deja invariante las ecuaciones de movimiento. Encuentre la cantidad conservada e interprete físicamente su resultado.

4.- Forzamiento: Una partícula de masa m unidimensional, descrita por la coordenada $x(t)$ y rapidez $\dot{x}(t)$, es sometida a un potencial externo $h(t)$ esta descrita por el Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + xh(t),$$

4-a Encuentre una transformacion no trivial que deja invariante este lagranjeano en el sentido de Noether

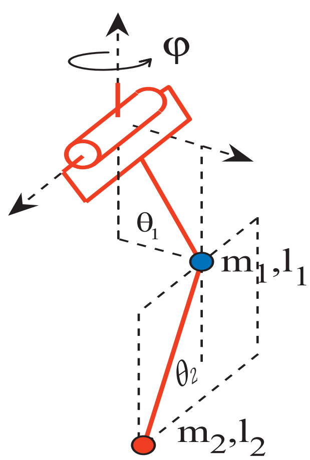
4-b Calcule e interprete las cantidades conservadas.

Tarea IV
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay, Ayudante: Jose Chesta

Las tareas son personales y se entregan el lunes antes de la clase.

1) Laser mecánico: Péndulo esférico doble: Un sistema físico que que satisface la dinámica del laser, ecuaciones de Maxwell y Bloch, esta compuesto por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante g. El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



1-a Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrías infinitesimales están relacionadas estas cantidades conservadas.

2-Fuerza de Lorentz: Considere una carga eléctrica q bajo la influencia de un potencial exterior $U(\vec{r})$ y un campo magnético exterior constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$, donde $\hat{z}$ es un vector constante, el cual satisface la ecuación de movimiento (Fuerza de Lorentz)

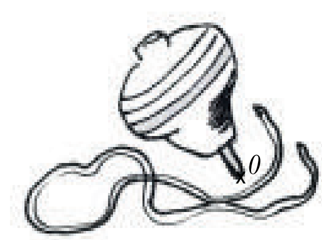
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}U + \frac{q}{c}\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

donde c es la velocidad de la luz.

2-a Encuentre la Acción que describe este sistema.

2-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrías infinitesimales están relacionadas estas cantidades conservadas.

3) Trompo con pua Fija Considere un trompo simétrico de masa M, momentos de inercia $I_1 = I_2 = I$, I_3 con respecto a los ejes principales. El centro de Masa se ubica a una distancia l de la púa (ver figura), la cual es representada por el punto O. En el Caso que la púa este fija



3-a ¿Cuál es la velocidad angular del trompo?

3-b ¿Cuál es la acción que describe a este sistema?

3-c Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrías infinitesimales están relacionadas estas cantidades conservadas.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea III
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay

Las tareas son personales y se entregan de lunes antes de la clase.

1) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta barra puede girar libremente en esta dirección vertical (ver figura 1). Sobre esta barra esta soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (cf. figura 1). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por el sistema cuando gira.

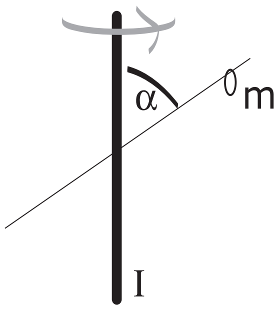


FIG. 1. Vara Mágica

1-a Encuentre el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

1-b Encuentre, gráficamente, los puntos de equilibrio del sistema (equilibrios relativos), estudie la estabilidad de éstos y grafiqué el espacio de fase.

1-c En el caso que la condición inicial engendre un pequeño momento angular en la dirección vertical, describa cualitativamente cual es el movimiento del anillo. Igualmente, en el caso que engendre una gran momento angular ¿que prodría ocurrir con el anillo?

2) Principio de Fermat La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio: "El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos" (PRINCIPIO DE FERMAT).

Si $v(x, y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio (por simplicidad considere el plano $\{x, y\}$).

2-a Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de fermat.

2-b Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuación (Recomendacion: A partir del principio de fermat deduzca la ley de Snell, usando esta ley trate de interpretar su resultado.)

2-c Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = cy$. ¿que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?

FIG. 2. Principio de Fermat

3) Sistema disipativo: Considere un péndulo plano el cual esta compuesto por una ésfera y cuerda ideal de masa m y largo l. Como consequencia de la presencia del aire este ejerce una fuerza proporcional a la velocidad caracterizada por un coeficiente de amortiguamiento ν, es decir, la ecuación de movimiento del péndulo toma la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta) - \nu\dot{\theta}$$

3-a Encuentre la Acción que caracteriza a este sistema.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea II
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay
Las tareas son personales y se entregan de lunes antes de la clase.

1)Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada: Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explcitamente del grado de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\mathrm{L}(q, q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} = \frac{d^l q(t)}{dt^l}$, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros.

1-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento que uno obtiene si uno minimiza la acción generada por el lagrangeano anterior ?

1-b ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

2) Lagrangeano para un sistema mecánico: A partir de las ecuaciones de Newton que describen un sistema mecánico que tiene N-variables cartesianas y N-n restricciones. Usando desplazamientos virtuales que respetan las restricciones, Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que el lagrangeano para un sistema mecánico tiene la forma

$$\mathrm{L} = T - V$$

donde T es la energía cinetica y V es la energía potencial.

3) Unicidad de lagangeanos Muestre que si considera un lagrangeano mas una derivada total, que tiene la forma

$$\mathrm{L'}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \mathrm{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{df(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{dt},$$

las ecuaciones de Euler-lagrange obtenida por cada lagrangeano son las mismas.

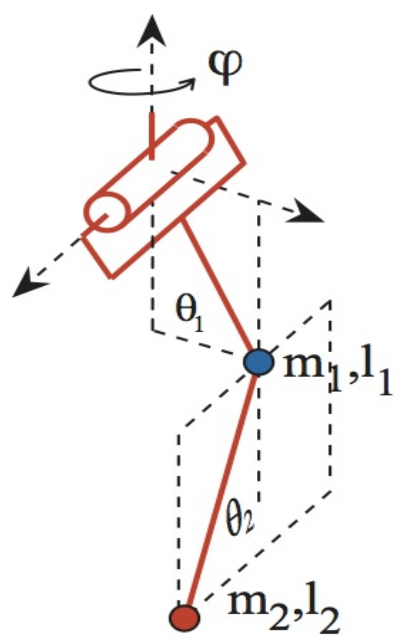
Escriba tres lagrangeanos diferentes (no triviales) que describen un péndulo esférico.

4 Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.

4-a¿Cuál es el lagrangeano que caracteriza a este sistema?

4-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

4-c ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema e interprte fisicamente los diferentes términos de las ecuaciones de movimiento?



Tarea I
Mecánica clásica (2016)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Jeremias Garay
Las tareas son personales y se entregan de lunes antes de la clase.

1) Oscilador no-lineal: Considere un oscilador inhomogeneo no lineal (ver figura 1), el cual para pequeñas deformaciones con respecto a su posición de equilibrio en la dirección horizontal satisface la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x + \alpha x^3,$$

donde m y $x(t)$ son la masa y posición de la partícula en el extremo del resorte, respectivamente, ω frecuencia natural de oscilacción del resorte, α da cuenta de la respuesta no lineal.

FIG. 1. Resorte no lineal

1-a Proponga una acción que describa este sistema.
1-b Encuente analíticamente las solución de este problema.
1-c Caracterice geométricamente el espacio de fase de manera cualitativa y numérica.

2)Péndulo doble: Considere un sistema formado por dos péndulos planos uno ideal y el otro realista de largo y masa $\{l_1, l_2\}$ y $\{m_1, m_2\}$, respectivamente. La cuerda l_2, es descrita por un resorte de largo natural l y constante elástica k. Uno de los péndulos tiene fijo su extremo superior a un pivote y el otro esta conectado al otro péndulo (ver figura 2).
2-a Determine las coordenadas generalizadas que describen este sistema.
2-b Calcule la acción de este sistema.
2-c Varie la acción y encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.

3) Dinámica de un boya: Considere un boya homogenea con forma aproximadamente coníca como se ilustra en la figura flota en el mar.

Si el material con que esta hecha la boya es de densidad menor que la del agua del mar, considere que el agua esta

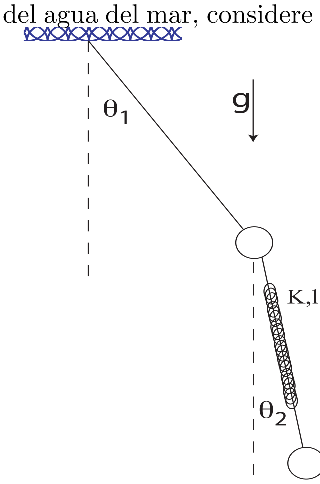


FIG. 2. Péndulo doble. El péndulo superior es ideal y el inferior es un péndulo realista.

quieta y por simplicidad considere que el movimiento es solo vertical

3-a Encuentre la ecuacin de movimiento de la boya.

3-b Determine la Acción que caracterice este sistema.

3-c Caracterice la diámica de la boya por medio de soluciones analíticas y el uso del espacio de fase.

FIG. 3. Boya en alta mar.