Tarea X
Mecánica clásica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1) Bifurcación Andronov-Hopf-Poincaré: Considere el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x$$
$$\dot{y} = \mu y + x - (x^2 + y^2)y$$

1-a Muestre que este sistema exhibe una inestabilidad, es decir, la solución $x = y = 0$ cuando el parámetro μ se modifica pase de ser un equilibrio estable a inestable.

1-b Después de ocurrir la bifurcación el sistema tiene como atractor una solución periódica (ciclo limite), encuentre la expresión analítica de este ciclo limite.

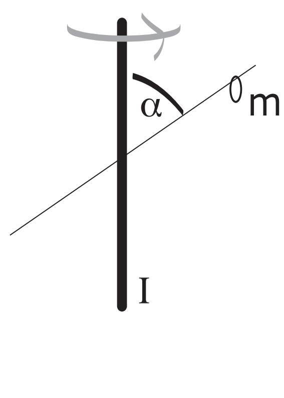
1-c Grafique el espacio de fase del sistema para valores de μ negativos y positivos.

2) Identidad de Jacobi Los paréntesis de Poisson satisfacen la siguiente identidad

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Demuestre esta propiedad.

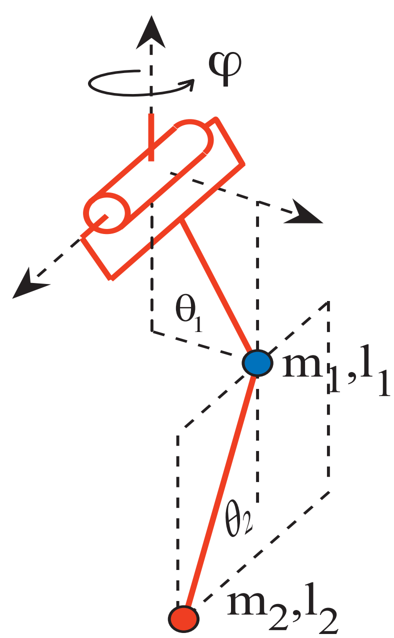
3) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 3). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.



3-a Muestre que este sistema presenta una bifurcación para su equilibrio relativo.

3-b Grafique el espacio de fase antes y después de la bifurcación.

4) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



Muestre que este sistema exhibe una bifurcación latente.

Tarea IX
Mecánica clásica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1) Péndulo de Andronov: Considere un aro de radio R el cual puede girar con respecto al pivote vertical en A (cf. Figura). El aro no tiene momento de inercia ($I = 0$). Sobre el aro hay un anillo de masa m, el cual puede deslizarse sin roce sobre el aro (Ver figura).

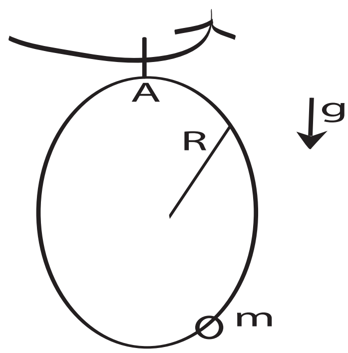


FIG. 1. Péndulo de Andronov

1-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que caracterizan al sistema.

1-b Para los distintos valores del momento angular, encuentre los equilibrios relativos y explique como aparecen y desaparecen.

1-c Estudie la estabilidad de estros equilibrios relativos.

1-d En caso que el aro este lubricado, que pasa con la estabilidad de los puntos de equilibrio. Dibuje el espacio de fase.

2) Ecuaciones de Euler: Las ecuaciones que describen un sólido rígido libre fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

2-a ¿Este sistema es lagrangeano?

2-b Encuentre los puntos de equilibrio.

2-c Estudie la estabilidad de estos puntos.

2-e Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico.

3) Oscilador no lineal: Consideremos una partícula de masa m cargada con una carga negativa q, en las proximidades de una placa infinita cargada con una densidad de carga positiva $\sigma\ C/m^2$.

En la placa se ha hecho un pequeño agujero para que pueda pasar la partícula cargada, tal como se muestra en la figura

La fuerza que ejerce el campo eléctrico producido por una placa plana sobre la carga negativa q, es constante en módulo y de sentido contrario al campo eléctrico

$$F = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} q$$

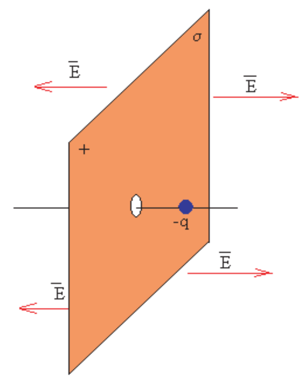


FIG. 2. Oscilador eléctrico

3-a Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.

3-b Calcule el período de oscilación de la carga eléctrica en función de la amplitud inicial.

4) Flotador Un cilindro sólido de radio r, altura h y masa m cuelga de un resorte de constante k, parcialmente sumergido en agua, como muestra la figura.

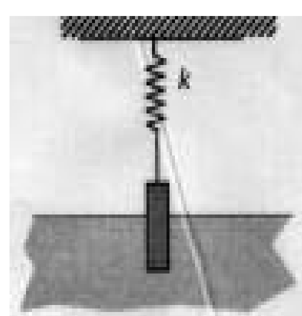


FIG. 3. Flotador

4-a Calcule el período para pequeñas oscilaciones del cilindro a lo largo de la vertical.

4-b En caso de considera un cono en vez del cilindro. El cono esta caracterizado por un ángulo α y altura h, como se modifica el período de oscilación.

Tarea VIII
Mecánica clásica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1- Estabilidad: Considere un péndulo ideal de largo l y masa m. Utilizando el método de análisis débilmente no lineal, basado en generar una cambio de variable que genera una ecuación lineal para la nueva variable, similar al usado en clase. Muestre que la solucin vertical es asintoticamente estable.

2- Anillo sobre un alambre Inclinado: un anillo de masa m desliza sobre un alambre inclinado de largo L y ángulo α, bajo la influencia de un resorte el cual es amarrado al anillo. El otro extremo del resorte esta fijo en el punto O, ver figura. El resorte es caracterizado por una constante elástica k y largo natural l_o. La altura entre el alambre y el suelo es h, como lo muestra la figura.

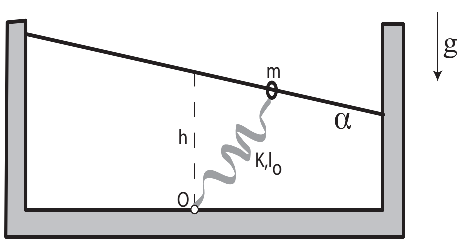


FIG. 1. Bifutrcación Imperfecta

2-a ¿ Cuál es la ecuación de movimiento del anillo?.

2-b Encuentre los equilibrios como función de los parámetros del sistema (k; l_0; m; h, α y mu).

2-c Si uno considera que el movimiento del anillo esta sobre amortiguado, es decir, el alambre esta lubricado por lo tanto sobre el anillo se ejerce una fuerza viscosa ($F = -\mu v$, v es la velocidad). Clasique la estabilidad de los puntos de equilibrio como función de h.

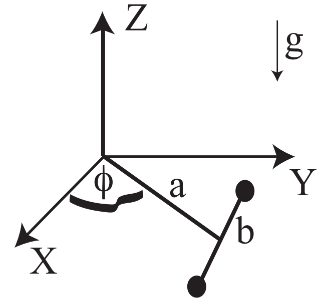


FIG. 2. Péndulo de Tap-Thomson

3-Péndulo de Tap-Thomson Generalizado: Una barra de longitud a está restringida a tener uno de sus extremos fijo al origen de coordenadas (ver figura). En el otro extremo una barra de longitud b puede rotar sobre su punto medio, pero siempre perpendicular a la barra a. En los extremos de la barra b se sujetan dos masas iguales de magnitud m. Las barras tienen masa despreciable (Péndulo de Tap-Thomson).

3-a Obtenga las ecuaciones de movimiento para el péndulo.

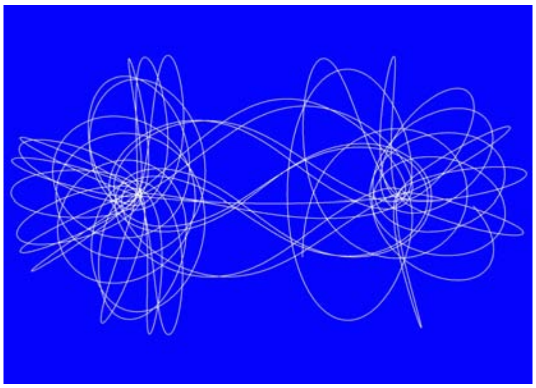
3-b Calcule el Routhiano que caracteriza a este sistema y encuentre el sistema reducido.

3-c Encuentre los puntos de equilibrio y estudie su estabilidad.

Tarea VII
Mecánica clásica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1-Problema de Euler Generalizado: Considere el problema restringido de Euler realizando la siguiente modificación: los dos cuerpos celestes masivos no describén una órbita circular sino una elíptica.

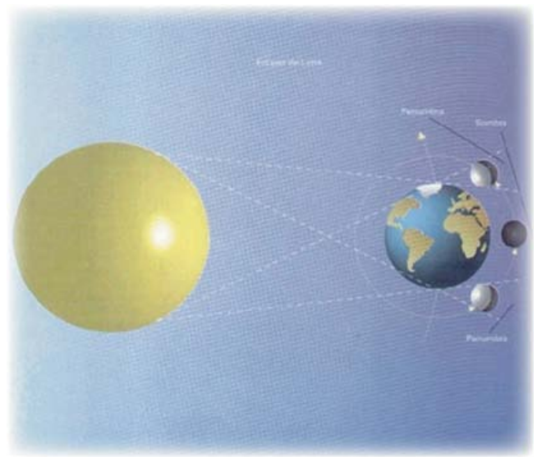


1-a) Encuentre la ecuación de movimiento para el tercer cuerpo pequeño.

1-b) ¿Este sistema tiene una función de Jacobi?

1-c) Simule numéricamente las ecuaciones encontradas e ilustre algunas trayectorias. Particularmente, uno de los mayores avances del siglo pasado fue el estudio de Poincaré del problema de tres cuerpos, caracterize el tipo de órbitas e ilustre que son caóticas. .

2-Puntos colineales: Para el problema restringido de dos cuerpos estime analíticamente los puntos colineales—explicite claramente sus supuesto y aproximaciones. Para el caso del Sol y la Tierra estime el valor numérico de estos puntos.



3-Problema de Kepler: Para el problema de dos cuerpos integre numericamente las ecuaciones de Newton y muestre que hay órbitas circulares, elípticas y parabólicas.

Tarea VI
Mecánica clásica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1-Sistemas disipativos: Considere un cometa en el espacio inter estelar, el cual se puede modelar como una partícula de masa m, bajo la influencia de un potencial externo $U(\vec{r})$ y una fuerza de fricción humeda caracterizada por un coeficiente de fricción α, es decir este cometa esta descrito por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} - \nabla U(\vec{r}),$$

donde ∇ es el gradiente.

1-a) Encuentre la acción que describe este sistema.

1-b) En el caso que el potencial es el gravitacional, que ocurrira con las orbitas parabólicas tipicamente exhibida por los cometas.

2- Partícula relativista: Considere una partícula que se mueve a gran velocidad–partícula relativista–la cual es descrita por el siguiente lagrangeano

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3}\dot{x}^i\dot{x}^i} - U(x),$$

donde c es la velocidad de la luz.

2-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que describen a este sistema e interprete.

2-b Que forma tendría el lagrangeano si la velocidad es pequeña comparada con la de la luz.

3- Precesión de Mercurio:: Uno de los hechos experimentales que contradicen la teoría de la gravedad de Newton es la precesión de la órbita de Mercurio. Su órbita no es una elipse propiamente tal, sino una que precesa con respecto a un eje. Para explicar este cambio, se plantea perturbar el potencial de Kepler, $U(r) = -\alpha/r$, por

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^3},$$

con $\beta \ll 1$. Con este nuevo potencial, calcule explícitamente la órbita de Mercurio y la precesión de la velocidad angular (puede usar las aproximaciones que estime conveniente, siempre y cuando estén justificadas). Investigue los valores de la precesión de la órbita y de la velocidad angular, y calcule el valor de β. Esta correción la entrega naturalemente la teorá de la relatividad general de Einstein

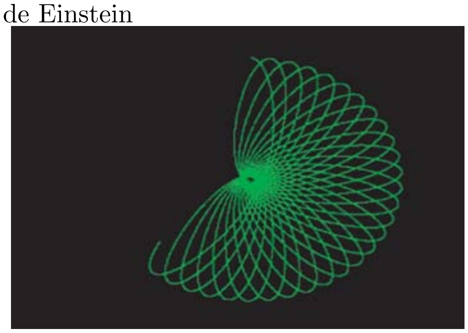


FIG. 1. Orbita de mercurio.

4-Vector de Laplace-Runge-lenz: Para el problema de Kepler–interaccion de dos cuerpos celeste–uno encuentra que el vector (laplace-runge-lenz)

$$A = \dot{r} \times L - GM\hat{r},$$

donde r es el vector posición, L es el momento ángular, G constante de gravitación, M la masa y $\hat{r}$ vector unitarion el la dirección del vector posición.

4-a Muestre que este vector es constante.

4-b Encuentre una transformación de simetría que permita obtener esta cantidad conservada.

4-c en el caso que la fuerza no sea proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, muestre que este vector no es conservado.

Tarea V
Mecánica clásica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1-Péndulo de Andronov Modificado: Un alambre con forma parabólica caracterizado por una concavidad α, gira con respecto a la vertical con una velocidad angular contante ω. Sobre el alambre se desliza un péndulo ideal de largo l y masa m sin fricción (ver figura).

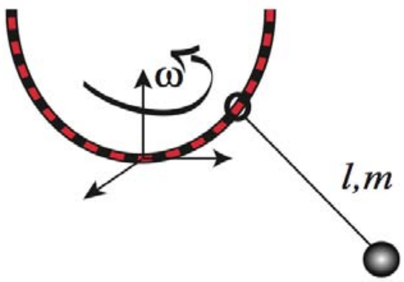


FIG. 1. Péndulo de Andronov modificado.

1-a Encuentre la acción que caracteriza el movimiento de la masa m.

1-b Cacule las ecuaciones de movimiento que describe este sistema.

1-c Encuentre las cantidades conservadas que describen este sistemas y a que simetría estan relacionadas.

2)Ecuaciones de Newton: Calcule los simboles de Cristoffell y escriba las ecuaciones de Newton en las siguientes cordenadas

2-a Cilíndricas.

2-b Esféricas.

2-c Parabólicas.

3- Ecuación de Newton covariante: Considere el siguiente langrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U(q^i),$$

donde g_{ij} es la métrica.

3-a) Muestre que las ecuaciones de movimiento toma la forma

$$g_{ij}\left(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{q}^l\dot{q}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial q^i},$$

donde los coeficientes Γ^j_{lm} son los símbolos de Christoffel, definidos por

$$\Gamma^j_{lm} \equiv \frac{1}{2}g^{jk}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k}\right)$$

3-b) Considere el siguiente lagrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = \sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j} - U(q^i),$$

calcule lasecuaciones de movimiento y comparalas con aquellas obtenidas en (3-a), comente claramente sus observaciones.

4-Fuerza de lorentz: considere una carga eléctrica q bajo la influencia de un potencial exterior $U(\vec{r})$ y un campo magnetico exterior constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$, el cual satisface la ecuación de movimiento (Fuerza de lorentz)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla U + \frac{q}{c}\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

donde c es la velocidad de la luz.

Encuentre la acción que describe este sistema.

Tarea IV
Mecánica clasica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1) Trompo: El trompo es es un juguete consistente por un sólido rígido con una punta muy afinada y acompaada de una cuerda (ver figura). Enrollando la cuerda alrededor del trompo y tirando violentamente de uno de sus extremos a la vez que se lanza el trompo contra el suelo, se consigue que el trompo rote sobre su punta, manteniéndose erguido y girando en el suelo.

Considere un trompo simétrico de masa M, momentos de inercia $I_1 = I_2 = I$, I_3 con respecto a los ejes principales. El centro de Masa se ubica a una distancia l de la púa (ver figura), la cual es representada por el punto O. En el Caso que la púa este fija

1-a Encuentre el lagrangeano y la acción de este sistema.

1-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrías infinitesimales que están relacionadas estas cantidades conservadas.

1-c ¿Este sistema es integrable? justifica claramente su respuesta.

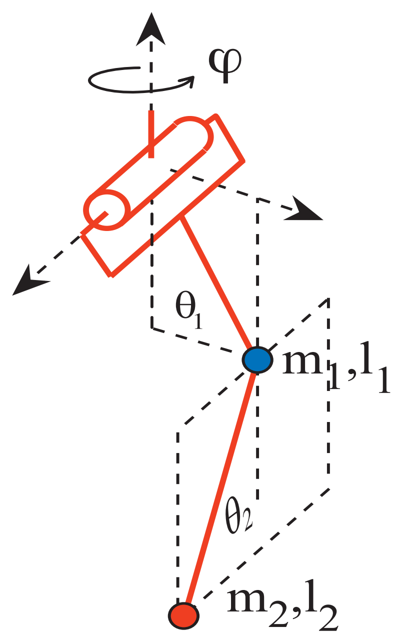
2) Problema de Euler: Considere el problema de interacción de gravitacional de tres cuerpos.

2-a Encuentre el lagrangeano y la acción de este sistema.

2-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrías están relacionadas estas cantidades conservadas.

2-c Este sistema es invariante de transformación de Galileo, ¿que implicancias físicas tiene esto sobre el sistema?

3) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



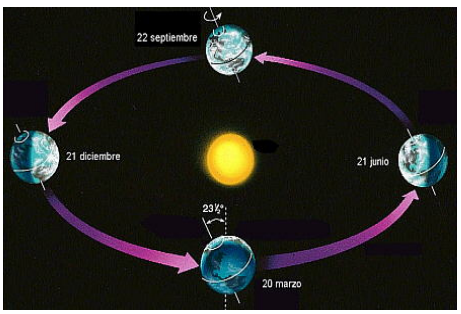
Usando el teorema de Noether explique las cantidades conservadas exhibidas por este sistema.

Tarea III
Mecánica clasica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal & Felipe Subiabre

1) Partícula relativista: Considere una partícula relativista. Encuentre el lagrangeano que describe esta partíula y las ecuaciones de movimiento que satisface.

2) Problema de Kepler: Considere el problema de interacción de gravitacional de dos cuerpos.

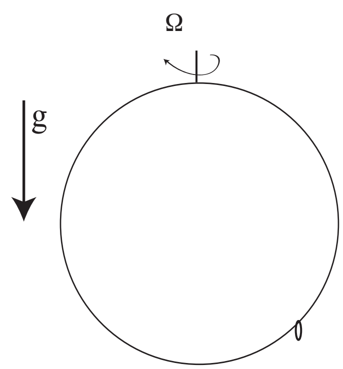


2-a Encuentre el lagrangeano y la acción de este sistema.

2-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrías están relacionadas estas cantidades conservadas.

3) Péndulo de Andronov Considere un aro de radio R, el cual esta lubricado. Un anillo de masa m, puede deslizarse sobre el aro sintiendo el efecto de disipación de tipo húmeda caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento λ.

Si el aro es sometido a girar con respecto a la vertical con una velocidad angular Ω (ver figura).



3-a Escriba un principio variacional que describe este sistema.

3-b Encuentre las ecuaciones de movimiento.

Tarea II
Mecánica clasica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal

1)Espacio de Fase: Un sistema mecánico esta descrito por el siguiente lagrangeano

$$\mathrm{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \varepsilon\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4},$$

donde m es la masa y ε un parámetro de control.

1-a ¿Variando la acción encuentre la ecuación de movimiento?

1-b Para ε positivo o negativo, dibuje numericamente el espacio de fase.

2) Lagrangeano para un sistema mecánico: A partir de las ecuaciones de Newton que describen un sistema mecánico que tiene N-variables cartesianas y N-n restricciones. Usando desplazamientos virtuales que respetan las restricciones, Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que el lagrangeano para un sistema mecánico tiene la forma

$$\mathrm{L} = T - V$$

donde T es la energía cinetica y V es la energía potencial.

3) Principio de Fermat La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio: "El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos" (PRINCIPIO DE FERMAT). Si $v(x, y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio (por simplicidad considere el plano $\{x, y\}$).

3-a Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de fermat.

3-b Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuuación.

INDICACIÓN: A partir del principio de fermat deduzca la ley de Snell, usando esta ley trate de interpretar su resultado.

3-c Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = cy$. ¿que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?

4) Péndulo esférico con disipación: considere un péndulo esférico ideal de largo natural l y masa puntual m. Cuando el péndulo se desplaza siente una fuerza de oposición (disipación) que satisface la ley Stokes $\vec{F} = -\mu\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula y μ coeficiente de disipación.

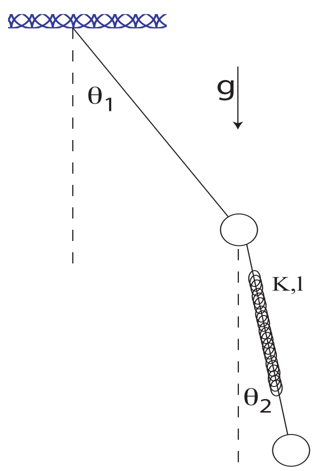
4-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que describe la dinámica del péndulo esférico con disipación.

4-b Encuentre el lagrangeano que describe este sistema.

Tarea I
Mecánica clasica (2011)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Estefania Vidal

1)Péndulo doble: Considere un sistema formado por dos péndulos planos uno ideal y el otro realista de largo y masa $\{l_1, l_2\}$ y $\{m_1, m_2\}$, respectivamente. La cuerda l_2, es descrita por un resorte de largo natural l y constante elástica k. Uno de los péndulos tiene fijo su extremo superior a un pivote y el otro esta conectado al otro péndulo (ver figura).



1-a Calcule la acción de este sistema.
1-b Varie la acción y encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.

2) Unicidad de lagangeanos Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange muestre que si considera un lagrangeano más una derivada total, que tiene la forma

$$\text{L'}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \text{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{df(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{dt},$$

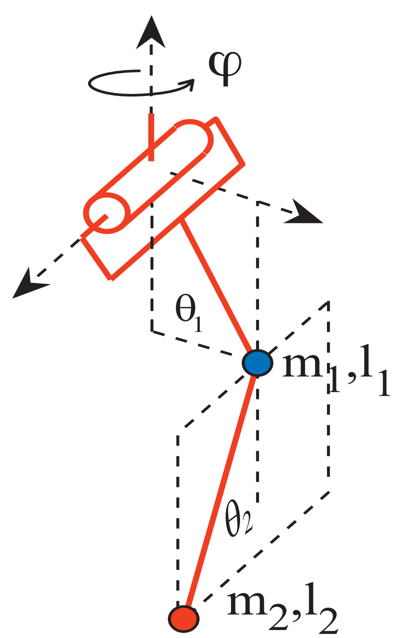
las ecuaciones de movimiento obtenida por cada lagrangeano son las mismas.
Escriba tres lagrangeanos diferentes (no triviales) que describen un péndulo esférico.

3)Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada: Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explcitamente del grado de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\text{L}(q, q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} \equiv \frac{d^l q(t)}{dt^l}$, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros.
3-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento obtenida al minimiza la acción generada por este lagrangeano?
3-b ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

4) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



4-a¿Cuál es el lagrangeano que caracteriza a este sistema?
4-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.
4-c ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema e interprte fisicamente los diferentes términos de las ecuaciones de movimiento?