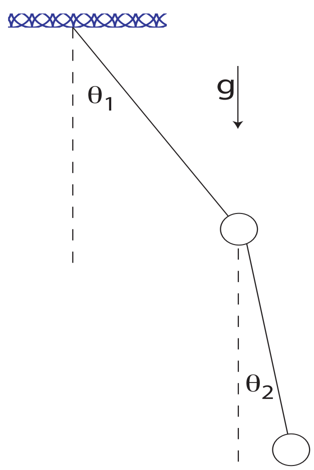
Tarea I
Mecánica clasica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

1)Péndulo doble: Considere un sistema formado por dos péndulos planos ideales–péndulo doble–de largo y masa $\{l_1, l_2\}$ y $\{m_1, m_2\}$, respectivamente. Uno de los péndulos tiene fijo su extremo superior a un pivote y el otro esta conectado al otro péndulo (ver figura).



1-a Calcule la acción de este sistema.
1-b Varie la acción y encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.

2) Unicidad de lagangeanos Muestre que si considera un lagrangeano más una derivada total, que tiene la forma

$$\mathrm{L'}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \mathrm{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{df(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{dt},$$

las ecuaciones de Euler-lagrange obtenida por cada lagrangeano son las mismas.
Escriba tres lagrangeanos diferentes (no triviales) que describen un péndulo esférico.

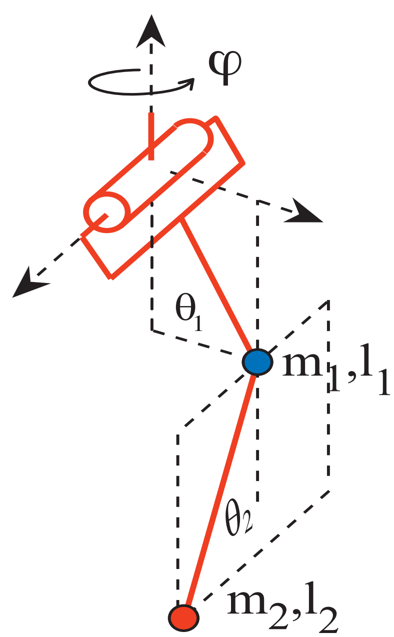
3)Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada: Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explcitamente del grado de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\mathrm{L}(q, q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} \equiv \frac{d^l q(t)}{dt^l}$, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros.

3-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento obtenida al minimiza la acción generada por este lagrangeano?
3-b ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

4) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



4-a¿Cuál es el lagrangeano que caracteriza a este sistema?
4-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.
4-c ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema e interprte fisicamente los diferentes términos de las ecuaciones de movimiento?

Tarea X
Mecánica clásica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

1) Teorema de Poisson: Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H = q^1 P_1 - q^2 p_2 - a(q^1)^2 + b(q^2)^2,$$

donde a y b son constante.

1-a Muestre que las tres siguientes cantidades son conservadas

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{p_2 - bq^2}{q^1}, \\ f_2 &= q^1 q^2, \\ f_3 &= q^1 e^{-t}, \end{aligned}$$

1-b Estas constantes de movimientos son funcionalmente independientes

1-c Encuentre el número máximo de constantes independientes.

2) Identidad de Jacobi Los paréntesis de Lagrange satisfacen la siguiente identidad

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\{x^b, x^c\} + \frac{\partial}{\partial x^c}\{x^a, x^b\} + \frac{\partial}{\partial x^b}\{x^c, x^a\} = 0.$$

donde $x^\mu = (\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$. Demuestre esta propiedad.

3) Sistema Hamiltoniano: Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia de un potencial generalizado (el cual depende explícitamente de la velocidad),

$$V = \frac{1 + \dot{r}^2}{r},$$

donde r es la distancia radial al origen.

3-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.

3-b Analice la conservación de momento angular.

3-e Estudie el espacio de fase de este problema y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

4) Laser: La descripción semiclásica del láser se basa en la interaccin auto-consistente del campo electromagnético con un medio activo dentro de una cavidad óptica. El campo eléctrico se describe clásicamente (por las ecuaciones de Maxwell) y la materia como conjunto de átomos que posee dos niveles de energía cuantizados; términos fenomenológicos se añaden para completar la descripción. El sistema es descrito por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \kappa\frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= -\gamma_\perp \frac{\partial P}{\partial t} - (\gamma_\perp^2 + (1+\delta)^2)P - \mu^2 N E, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_\parallel (N - N_0) + E\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma_\perp P\right), \end{aligned} \tag{1}$$

donde E, P, N son respectivamente el campo eléctrico, la polarización y la inversión de población y $\{\kappa, \gamma_\perp, \gamma_\parallel, N_0, \delta, \mu\}$ son parámetros que caracterizan la dinámica de este sistema.

Muestren que las ecuaciones anteriores son Hamiltonianas y caracterice el paréntesis de Poisson.

Tarea IX
Mecánica clásica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

1) Anillo sobre un alambre horizontal: un anillo de masa m desliza sobre un alambre horizontal de largo L, bajo la influencia de un resorte el cual es amarrado al anillo, el otro extremo del resorte esta fijo en el punto O, ver figura. El resorte es caracterizado por una constante elástica k y largo natural l_o. La altura entre el alambre y el suelo es h, como lo muestra la figura.

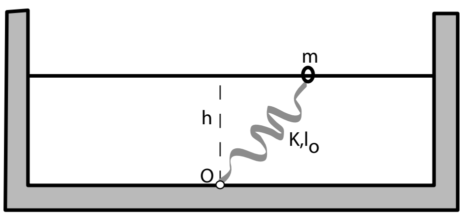


FIG. 1. Anillo

1-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento del anillo?
1-b Encuentre los equilibrios como función de los parámetros del sistema (k, l_o, m, y h).
1-c Como función de h caracterice el diagrama de bifurcación.

2) Partícula de Shilnikov: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (ver figura 2). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 2). Considere un anillo de masa m sobre la vara la cual tiene un lubricante que hace que el movimiento del anillo es sobre amortiguado.
2-a Encuentre las ecuaciones de movimiento del anillo.
2-b Como función del momento angular vertical caracterice la dinámica de este sistema. Particularmente, caracterice las inestabilidades

3) Hilo Magnético: Considere un hilo magnético con anisotropía positiva el cual es forzado con un campo magnético externo, ortogonal al hilo y compuesto por una componente constante y otra oscilatoria, tal como se ilustra en la figura. Este sistema físico puede ser interpretado como una cadena de osciladores no lineales forzados paramétricamente. Cerca de su resonancia paramétrica la dinámica de la magnetización en la dirección del hilo magnético es descrita por la amplitud

$$\frac{dA}{dt} = -i\nu A - i|A|^2 A - \mu A + \gamma \bar{A},$$

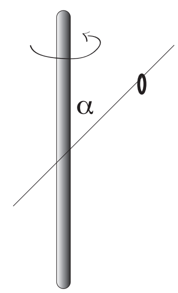


FIG. 2. Partícula de Shilnikov.

donde ν es el desincorización entre la frecuencia de forzaje y el doble de la frecuencia de prececión, μ da cuenta de la disipación y γ es la amplitud de forzamiento magnético

Estudie los estados de equilibrio de este sistema, como función de los parámetros $\{\nu, \mu, \gamma\}$ y caracterice cuidadosamente todas las bifurcaciones.

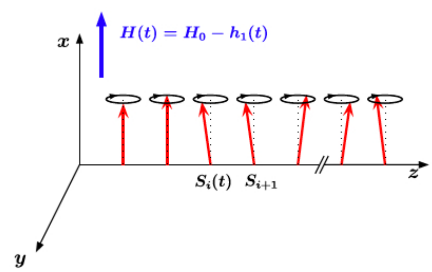


FIG. 3. Hilo magnético.

4) Paréntesis de Poisson: Muestre que para el problema del sólido rigido, el cual es descrito por las ecuaciones de Euler, los paréntesis siguientes

$$\{F(\vec{\Pi}), G(\vec{\Pi})\} = -\vec{\Pi} \cdot (\bigtriangledown_{\Pi} F \times \bigtriangledown_{\Pi} G)$$

satisfacen los axiomas de paréntesis de Poisson.

4) Paréntesis de Poisson: Muestre que para el problema del sólido rigido, el cual es descrito por las ecuaciones de Euler, los paréntesis siguientes

$$\{F(\vec{\Pi}), G(\vec{\Pi})\} = -\vec{\Pi} \cdot (\bigtriangledown_{\Pi} F \times \bigtriangledown_{\Pi} G)$$

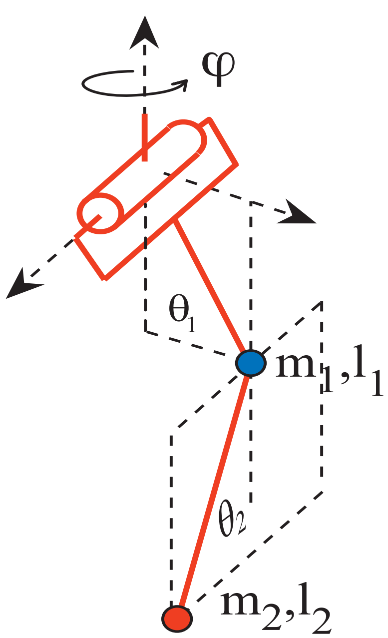
satisfacen los axiomas de paréntesis de Poisson.

Tarea VI
Mecánica clásica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

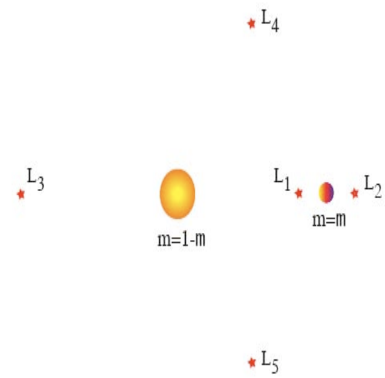
1) Péndulo de Foucault: Muestre que la posición vertical vertical de un péndulo de Foucault es inestable.

2) Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



Estudie las propiedades de estabilidad del equilibrio relativo $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

3) Puntos de libración Analice la estabilidad de los puntos de libración del problema de tres cuerpos $(\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\})$



Tarea V
Mecánica clásica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

1) Puntos colineales: El problema restringido de tres cuerpos esta caracterizado por tener tres puntos de equilibrios colineales (L_1, L_2 y L_3).

Estime como función de los parámetros que caracterizan este problema el valor de los puntos colineales. Justifique claramente todos sus argumentos.

2) Coordenada Parabólicas: Defina las coordenadas Parabólicas en el plano y cilíndrica. Calcule:
2a) Encuentre la métrica.
2b) Encuentre los símbolos de Cristoffel.

3) Problema de tres cuerpos restringido estático: Considere una partícula bajo la influencia de un potencial

$$U = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\beta}{r_2},$$

donde $r_1 = \sqrt{(z-b)^2+\rho^2}$, $r_2 = \sqrt{(z+a)^2+\rho^2}$, $\{\rho, \varphi, z\}$ son las coordenadas cilíndricas, y $\{\alpha, \beta\}$ caracterizan la interacción.

Por medio del uso de coordenadas elípticas, encuentre el lagrangeano que caracteriza este sistema y determine las cantidades conservada. Muestre si es o no este sistema es integrable.

4) Partícula súper no Galileano: Considere una partícula descrita por un lagrangeano

$$L = \alpha\frac{\dot{\vec{v}}^2}{2} + m\frac{\vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}),$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del vector $\vec{r}$ en un sistema de coordenadas inercial. Si esta partícula es descrita en un sistema de coordenadas no inercial el cual es descrito por un vector de traslación $\vec{R}(t)$ y velocidad ángular $\vec{\Omega(t)}$. Encuentre el lagrangeano y ecuaciones de movimientos que describe esta partícula desde el sistema no inercial. Interprete físicamente los términos de la ecuación de movimiento.

Tarea IV
Mecánica clasica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

1) Problema de tres cuerpos celestes: Considere tres cuerpos celestes de igual masa.

Simule numéricamente, la dinámica de estos tres cuerpos y describa e ilustre cualitativamente que observa en su simulación.

En el caso, que una de las masa es más pequeña que las otra dos idénticas, que tipo de dinámica observa.

2) Potencial no Kepleriano: Considere la posibilidad que la dinámica de entre cuerpos celestes es caracterizada por un potencial de la forma

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2},$$

donde α es una constante con dimensiones que caracterizan el potencial

Encuentre y caracterice analíticamente las órbitas de este sistema.

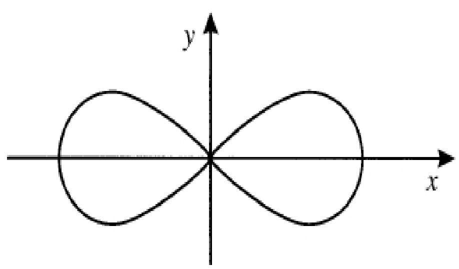


FIG. 1. Órbita antifaz.

3) Orbita antifaz: Determine la fuerza central que genera órbitas del tipo "antifaz" como se ilustra en la figura, la cual tiene la forma $r^2 = 2a^2 cos(2\phi)$.

FIG. 2. representacion de la interacción de dos hoyos negros.

4) Problema de dos cuerpos esféricos: Considere dos cuerpos celestes eféricos de masas m_1 y m_2, y momento de inercia I_1 e I_2.

Si entre los cuerpos celeste hay una fuerza central, muestre que este sistema es integrable.

Tarea III
Mecánica clasica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

1) Partícula unidimensional: Considere una partícula unidimensional de masa m, la cual esta bajo la influencia de un potencial externo de la forma

$$V(x) = V_0 \tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right),$$

donde x es la coordenada que describe la posición de la partícula y $\{V_0, a\}$ parámetros que caracterizan el potencial.

1-a Encuentre el lagrangeano y la acción de este sistema.

1-b Encuentra la trayectoria (x(t)) y el periodo de oscilación de esta partícula. Examine los limites de alta y baja energía en comparacion con V_0.

2) Órbitas: La interacciones nucleares entre nucleones puede ser descrita por un potencial central efectivo de la forma (Potencial de Yukawa)

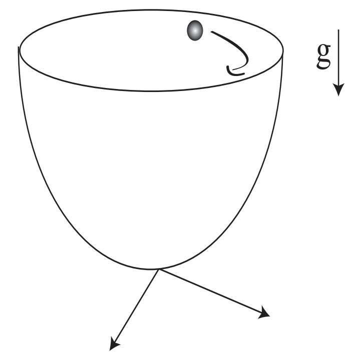
$$V(r) = -V_0 \frac{e^{\alpha r}}{r},$$

donde $\{V_0, a\}$ son parámetros dimensionales que caracterizan el potencial.

2-a Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema

2-b Como función de los parámetros caracterize cualitativamente las órbitas que exhibe este sistema y simule numericamente.

3) Fuerza central efectiva considere una partícula que se mueve sobre una parábola de revolución caracterizada por una concavidad α, como se ilustra en la figura.



3-a Muestre que la dinámica de este sistema es análogo a un problema de dos partíulas con un potencial efectivo

4) Resorte No lineal: Considere dos partículas unidas por un resorte no lineal el cual esta caracterizado por una fuerza

$$\vec{F} = -k\vec{x} - \alpha\vec{x}^3,$$

donde $\vec{x}$ da cuenta del desplazamiento del resorte su largo natural.

4-a Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema

4-b Como función de los parámetros caracterize cualitativamente las órbitas que exhibe este sistema.

Tarea II
Mecánica clasica (2010)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Nicolás Verschueren van Rees

1) Electromagnetismo: las ecuaciones que describen los campos eléctricos ($\vec{E}$) y magnéticos ($\vec{B}$) son las ecuaciones de Maxwell.

Muestre que las ecuaciones de Maxwell derivan de un principio de mínima acción, encuentre la acción y caracterize sus cantidades conservadas.

2) Vara Mágica: Un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical, puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 1).

Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.

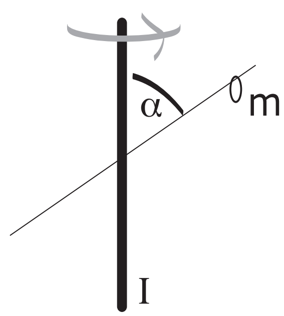


FIG. 1. Vara mágica.

2-a Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

2-b Caracterize las cantidades conservadas de este sistema.

2-c Encuentre (gráficamente) los puntos de equilibrio del sistema, estudie la estabilidad de éstos.

2-d En el caso que la condición inicial engendre un pequeño momento angular en la dirección vertical, describa cualitativamente cual es el movimiento del anillo. En el caso que engendre una gran momento angular, analice la dinámica del sistema.

3) Principio de Fermat La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio: "El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos" (PRINCIPIO DE FERMAT). Si $v(x, y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio (por simplicidad considere el plano $\{x, y\}$).

3-a Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de fermat.

3-b Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuuación. Recomendacion: A partir del principio de fermat deduzca la ley de Snell, usando esta ley trate de interpretar su resultado.

3-c Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = cy$. ¿que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?

4) Sistema disipativo: Considere un péndulo plano el cual esta compuesto por una ésfera y cuerda ideal de masa m y largo l. Como consecuencia de la presencia del aire este ejerce una fuerza proporcional a la velocidad caracterizada por un coeficiente de amortiguamiento ν, es decir, las ecuación de movimiento del péndulo toma la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta) - \nu\dot{\theta}$$

4-a Encuentre la acción que caracteriza a este sistema.