Control I
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce & Leonardo Gordillo

PACS numbers:

1-Péndulo de Andronov Modificado: Un alambre con forma parabólica caracterizado por una concavidad α, gira con respecto a la vertical con una velocidad angular contante ω. Sobre el alambre se desliza un péndulo ideal de largo l y masa m sin fricción (ver figura).

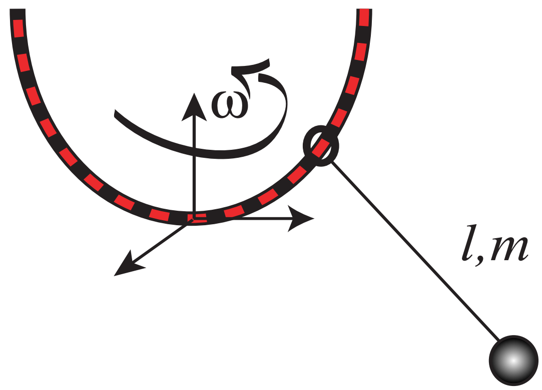


FIG. 1: Péndulo de Andronov modificado.

1-a Encuentre la acción que caracteriza el movimiento de la masa m.
1-b Cacule las ecuaciones de movimiento que describe este sistema.
1-a Encuentre las cantidades conservadas que describen este sistemas y a que simetría estan relacionadas.

2-Partícula disipativa y forzada: Una partícula de masa m unidimensional esta sometida a una fuerza externa $E(t)$ y además esta bajo la influencia de una fuerza de amortiguamiento $F = -\nu\dot{x}$. Esta partícula es descrita por el lagrangeano

$$\mathcal{L} = e^{-\nu t}(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + xE(t)),$$

2-a Encuentre una transformación infinitesimal que deja invariante este lagranjeano en el sentido de Noether.

2-b Calcule e interprete las cantidades conservadas asociada a la simetría infinitesimal.

3-Fuerza central: Una partícula se desplaza sin fricción sobre la superficie de un cono vertical de ángulo α bajo la influencia del campo gravitatorio (ver figura).

3-a Muestre que la dinámica de está partícula es descrita por una fuerza central, encuentre el potencial efectivo de este sistema.

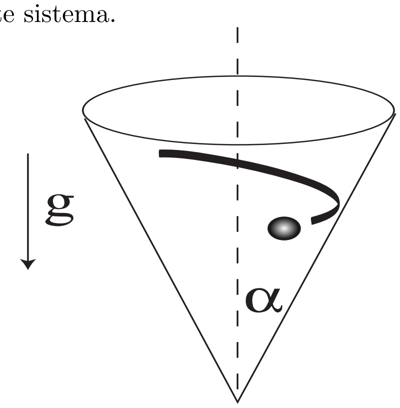


FIG. 2: Problema fuerza central.

3-b Encuentre la forma integral de la órbita y en el límite $\alpha \to \pi/2$, calcule la forma ecplicita de está orbita

Control II
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce & Leonardo Gordillo

PACS numbers:

1-Péndulo plano doble: Considere un péndulo doble el cual esta formado por dos cuerdas ideales de largo l y masas puntuales de masa m. El péndulo superior tiene un extremo fijo en el punto O y el péndulo inferior tiene un extremo fijado a la masa del péndulo superior. Ambos péndulos se mueven bajo la influencia del campo gravitatorio en el mismo plano como se ilustra en la figura

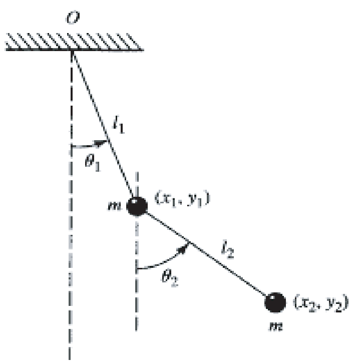


FIG. 1: Péndulo doble.

El equilibrio natural de este sistema es que ambos péndulos esten verticales. Encuentre las frecuencias de pequeñas oscilaciones, interprete estas frequencias y describa graficamente los modos normales.

2-Sólido Rígido: Un sólido rígido sin fuerza externa es descrito por las ecuaciónes de Euler. En la figura 2 se ilustra un típico sólido rígido. A pesar que es un sistema con un número impar de variables uno puede describir este sistema con el siguiente formalismo Hamiltoniano.

Considere el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\{\Pi_1 I_1 + \Pi_2 I_2 + \Pi_3 I_3\},$$

donde Π_i y I_i son las componentes del momento angular y momentos de inercia en los ejes principales del sólido rígido respectivamente.

2-a Usando el siguiente parentesis de Poisson

$$\{F, G\} = -\Pi \bullet (\nabla_\Pi F \wedge \nabla_\Pi G)$$

donde $\{\bullet, \wedge\}$ representan el producto escalar y cruz de vectores, y ∇_Π es el gradiente con respeto a las cordenadas del momento angular $\vec{\Pi}$. Deduzca las ecuaciones de Euler.

FIG. 2: Representación de sólido rígido.

2-b Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación de Euler y estudie la estabilidad de éstos.

3-Bifurcación: Considere una cinta transportadora horizontal la cual se mueve a velocidad constante v_0. Esta cinta es empujada por dos poleas, como se ilustra en la figura. En la sección horizontal superior se coloca una masa m, la cual esta conectada con un resorte ideal de largo natural cero y constante elástica k (ver figura). Debido a que la cinta se mueve rápido aparece una fuerza de arrastre originada por la fricción, la cual depende la velocidad relativa entre los objetos de la siguiente forma

$$f = \begin{cases} -\beta(v1 - v)^2 & v \geq 0 \\ \beta(v1 - v)^2 & v < 0 \end{cases}$$

donde β is a parametro con unidades de $kg\ m^{-1}$, v_1 es un parametro con unidades de velocidad que caracteriza la fricción.

Muestre que este sistema exhibe una bifurcación de Andronov-Hopf para un valor crítico de la velocidad de la cinta. Para valores mayores o menores de esta velocidad que moviminiento realizara el bloque.

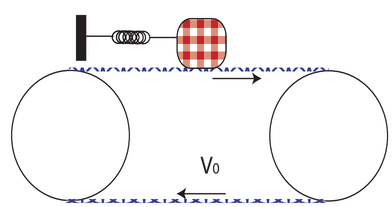


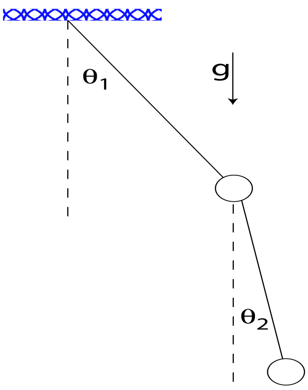
FIG. 3: Bifurcación.

Tarea I
Mecánica clasica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

PACS numbers:

1)Péndulo doble: Considere un sistema formado por dos péndulos planos ideales—Péndulo doble—de largo y masa $\{l_1, l_2\}$ y $\{m_1, m_2\}$, respectivamente. Uno de los pendulos tiene fijo su extremo superior a pivote y el otro esta conectado al otro péndulo (ver figura).



1-a Calcule la acción de este sistema.

1-b Varie la acción y encuentre la ecuación de movimiento de este sistema.

2) Lagrangeano para un sistema mecánico: A partir de las ecuaciones de Newton que describen un sistema mecánico que tiene N-variables cartesianas y N-n restricciones. Usando desplazamientos virtuales que respetan las restricciones, Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que el lagrangeano para un sistema mecánico tiene la forma

$$\mathrm{L} = T - V$$

donde T es la energía cinetica y V es la energía potencial.

3) Unicidad de lagangeanos Muestre que si considera un lagrangeano mas una derivada total, que tiene la forma

$$\mathrm{L}'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \mathrm{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{df(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{dt},$$

las ecuaciones de Euler-lagrange obtenida por cada lagrangeano son las mismas.

Escriba tres lagrangeanos diferentes (no triviales) que describen un péndulo esférico.

4)Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada: Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explcitamente del grado de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\mathrm{L}(q, q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} = \frac{d^l q(t)}{dt^l}$, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros.

4-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento que uno obtiene si uno minimiza la acción generada por el lagrangeano anterior ?

4-b ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

Tarea II
Mecánica clasica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

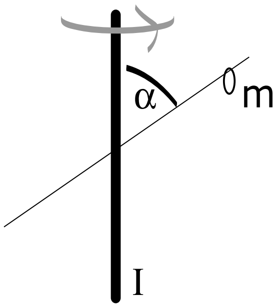
PACS numbers:

1) Principio de mínima acción: Considere un péndulo plano ideal de largo l y masa m.

1-a Encuentre la acción que caracteriza este sistema.

1-b Considere distinta trayectorias y calcule la acción numericamente, muestre que las trayectorias solucion de las ecuaciones de Newton son mínimos para la acción.

2) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 3). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.



2-a Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

2-b Encuentre (gráficamente) los puntos de equilibrio del sistema (equilibrios relativos), estudie la estabilidad de éstos.

2-c En el caso que la condición inicial engendre un pequeño momento angular en la dirección vertical, describa cualitativamente cual es el movimiento del anillo. Y en el caso que engendre una gran momento angular que prodría ocurrir con el anillo?.

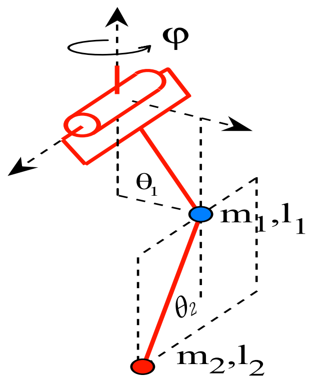
3) Principio de Fermat: La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio "El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos" (PRINCIPIO DE FERMAT). Si $v(x,y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio (por simplicidad considere el plano $\{x,y\}$).

3-a Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de fermat.

3-b Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuuación[1]

3-c Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = cy$. ¿que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?

4 Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



4-a¿Cuál es el lagrangeano que caracteriza a este sistema?

4-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

4-c ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema e interprte fisicamente los diferentes términos de las ecuaciones de movimiento?

---

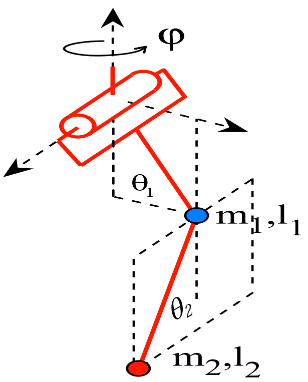
[1] Recomendacion: A partir del principio de fermat deduzca la ley de Snell, usando esta ley trate de interpretar su resultado.

Tarea III
Mecánica clasica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

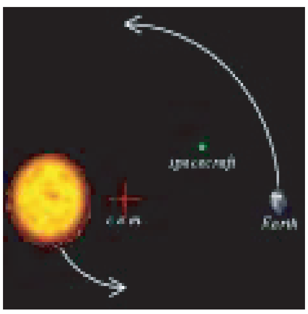
PACS numbers:

1 Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



1-a Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

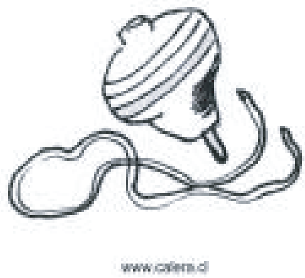
2) Problema de Kepler: Considere el problema de interacción de gravitacional de dos cuerpos.



2-a Encuentre el lagrangeano y la acción de este sistema.

2-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

3) Trompo con pua Fija Considere un trompo simétrico de masa M, momentos de inercia $I_1 = I_2 = I$, I_3 con respecto a los ejes principales. El centro de Masa se ubica a una distancia l de la púa (ver figura), la cual es representada por el punto O. En el Caso que la púa este fija



3-a ¿Cuál es la velocidad angular del trompo?

3-b ¿Cuál es la acción que describe a este sistema?

3-c Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

Tarea IV
Mecánica clasica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

PACS numbers:

1- Ecuación de Newton covariante: Considere el siguiente langrangeano

$$L\{q^i,\dot{q}^i\} = g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U(q^i),$$

donde g^{ij} es la métrica.

1-a) Muestre que las ecuaciones de movimiento toma la forma

$$g_{ij}\left(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{q}^l\dot{q}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial q^i},$$

donde los coeficientes Γ^j_{lm} son los simbolos de Christoffel, definidos por

$$\Gamma^j_{lm} \equiv \frac{1}{2}g^{jk}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k}\right)$$

1-b) Considere el siguiente lagrangeano

$$L\{q^i,\dot{q}^i\} = \sqrt{g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j} - U(q^i),$$

calcule lasecuaciones de movimiento y comparalas con aquellas obtenidas en (1-a), comente claramente sus observaciones.

2-Sistemas disipativos: Considere un cometa en el espacio inter estelar, el cual se puede modelar como una partícula de masa m, bajo la influencia de un potencial externo $U(\vec{r})$ y una fuerza de fricción humeda caracterizada por un coeficiente de fricción α, es decir este cometa esta descrito por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} - \nabla U(\vec{r}),$$

donde ∇ es el gradiente.

2-a) Encuentre la acción que describe este sistema.

2-b) En el caso que el potencial es el gravitacional, que ocurrira con las orbitas parabólicas tipicamente exhibida por los cometas.

3-Fuerza de lorentz: considere una carga eléctrica q bajo la influencia de un potencial exterior $U(\vec{r})$ y un campo magnetico exterior constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$, el cual satisface la ecuación de movimiento (Fuerza de lorentz)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla U + \frac{q}{c}\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}$$

donde c es la velocidad de la luz.

Encuentre la acción que describe este sistema.

4-Ecuaciones de Newton: Calcule los simboles de Cristoffell y escriba las ecuaciones de Newton en las siguientes cordenadas

4-a Cilíndricas.

4-b Esféricas.

4-c Parabólicas.

Tarea V
Mecánica clasica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

PACS numbers:

1- Partícula relativista: Considere una partícula que se mueve a gran velocidad–partícula relativista–la cual es descrita por el siguiente lagrangeano

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \dot{x}^i} - U(x),$$

donde c es la velocidad de la luz.

1-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que describen a este sistema e interprete.

1-b Que forma tendria el lagrangeano

2-Caida libre: Una partícula de masa m en la superficie de la tierra aproximadamente esta descrita por el lagreangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

donde $\{x, y\}$ describen el desplazamiento horizontal y vertical respectivamente y g es el parámetro que da cuenta de la gravedad.

Muestre que la transformación infinitesismal

$$x = x'$$
$$y = y' + \sigma$$

deja invariante las ecuaciones de movimiento. Encuentre la cantidad conservada e interpretela fisicamente!

3-Vector de Laplace-Runge-lenz: Para el problema de Kepler–interaccion de dos cuerpos celeste–uno encuentra que el vector (laplace-runge-lenz)

$$A = \dot{r} \times L - GM\hat{r},$$

donde r es el vector posición, L es el momento ángular, G constante de gravitacion, M la masa y $\hat{r}$ vector unitarion el la dirección del vector posición.

3-a Muestre que este vector es constante.

3-b Encuentre una transformacion de simetria que permita obtener esta cantidad conservada.

3-c en el caso que la fuerza no sea proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, muestre que este vector no es conservado.

4-Forzamiento: Una partícula de masa m unidimensional sometida a un potencial externo $h(t)$ esta descrita por el lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + xh(t),$$

4-a Encuentre una transformacion no trivial que deja invariante este lagranjeano en el sentido de Noether

4-b Calcule e interprete las cantidades conservadas.

Tarea VI
Mecánica clasica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

PACS numbers:

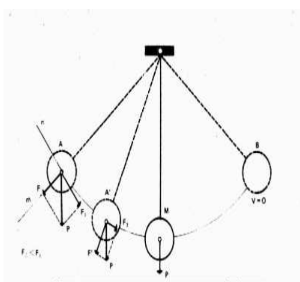
1-Potencial de Morse: Empiramente se ha mostrado que la interacción de moléculas diatómicas es central y se puede describir por (potencial de Morse [1])

$$V(r) = D\left(e^{-2\alpha r} - e^{\alpha r}\right)$$

donde los parámetros $\{\alpha, D\}$ son positivos y caracterizan la interacción.

1-a En el caso del movimiento de una partícula unidimensional encuentre explicitamente las trayectoria $x\left(t\right)$ y carcterize el tipo de soluciones en funcion de la energía. Caracterize las trayectorias en el espacio de fase.

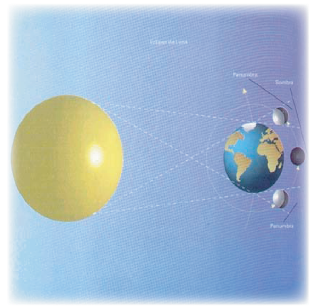
1-b En el caso que el movimiento es tridimensional, caracterize numericamente la órbita observada.



Fuerza que actuan en un pendulo

2-**Péndulo ideal:** Considere un péndulo formado por una cuerda ideal de largo l y una masa puntual m, como se ilustra en la figura.

Determine el periodo de oscilación como función de la condición [2].



3-Sol-Tierra-Luna: Muestre que el potencial efectivo del sistema luna tierra tratado como un solo objeto bajo el campo gravitacional del Sol puede ser aproximado por un potencial

$$V = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\delta}{r^3} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

donde r es la distancia del Sol al centro de masa de tierra y la luna.

4-**Periodo de oscilación:** Determine el periodo de oscilación en función de la energía y grafique este, para una partícula unidimensional de masa m bajo la influencia de un potencial

$$U = A|x|^n$$

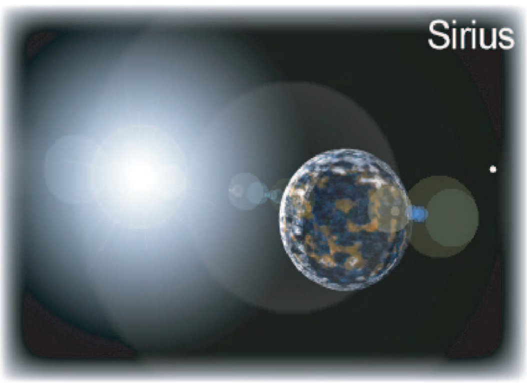
[1] P. M. Morse, Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels. Phys. Rev. **34**, 57, 1929
[2] En caso que sea necesario considere las aproximaciones que considere pertinentes.

Tarea VII
Mecánica clasica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

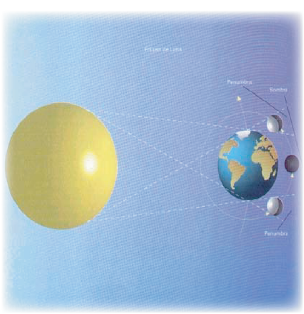
PACS numbers:

1-Problema de tres cuerpos restringido elíptico: Considere el problema restringido de tres cuerpos, donde el sistema esta formado por dos cuerpos muy masivos (celestes) los cuales describen una trayectoria elíptica[1] y un tercer cuerpo pequeño, el cual no afecta la trayectoria de los grandes cuerpos celestes.



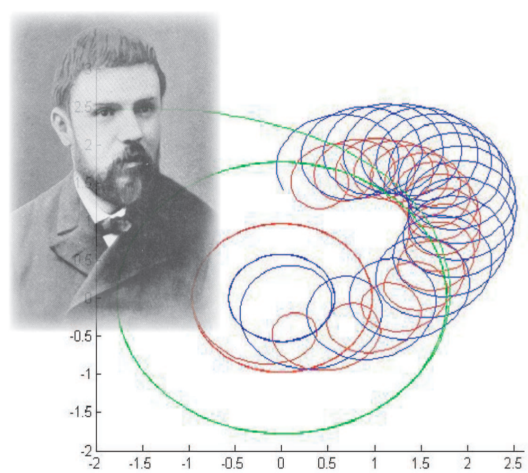
1-a Encuentre las ecuaciones de movimiento en el sistema sinoidal.
1-b Encuentre o caracterize los puntos de equilibrio de este sistema.

2-Puntos colineales: Para el problema restringido de dos cuerpos estime analíticamente los puntos colineales [2]. Para el caso del Sol y la Tierra estime el valor numérico de estos puntos.



3-Problema de Kepler: Para el problema de dos cuerpos integre numericamente las ecuaciones de Newton y muestre que hay orbitas circulares, elípticas y parabólicas.

4-Problema de Poincaré: Uno de los mayores avances del siglo pasado fue el estudio de Poincaré del problema de tres cuerpos. Integre numericamente las ecuaciones de Newton de la interacción gravitacional de tres cuerpos y caracterize el tipo de orbitas.



[1] Es decir la Orbita NO ES CIRCULAR.
[2] Explicite claramente sus supuesto y aproximaciones.

Tarea VIII
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

PACS numbers:

1-Oscillador armónico: Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un oscillador armónico tridimensional, el cual es caracterizado por un potencial,

$$V = \frac{m}{2}\omega^2 r^2$$

donde ω es la frequencia angular.

1-a Muestre que la ecuacion de la órbita tiene la forma

$$\frac{l^2}{mEr^2} = 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L}{E^2}} \cos 2(\varphi - \varphi_0)$$

donde E y l son la energía y momento angular respectivo.

1-b Esta órbita que tipo de curva decribe.

1-c Muestre que el periodo de la órbita es independiente del energía y momento angular

1-d Calcule la dependencia explicita del radio como función del tiempo.

2-Ley de Snell:2-1 Muestre que una partícula de energia E es refractada cuando pasa de una region sin potencial a una region con potencial $-V$ (ver figura). Si el ángulo de incidencia es θ_0 y el ángulo de refracción es θ_1 satisfacen la relacion (Ley de Snell)

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1} = n,$$

donde los ángulos son medidos con respecto a la normal y $n = \sqrt{1 + V/E}$ es el indice de refracción.

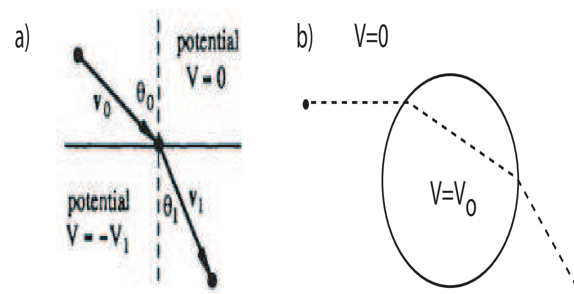
2-2 Use la ley de Snell anterior para mostrar que una partícula que incide con un parametro de impacto b sobre un potencial cuadrado

$$V(r) = \begin{cases} -V_o & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

es escateriada en un ángulo ϑ que satisface la relación

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2 \sin^2 \vartheta/2}{n^2 + 1 - 2n\cos\vartheta/2}$$

2-3 encuentre la sección diferencial de scattering.



3-Orbita de potencial Repulsivo: Muestre que la ecuación para la órbita de una partícula que se mueve en un potencial repulsivo $V(r) = k/r^2$ es

$$\frac{r_0}{r} = \cos\alpha\varphi.$$

3-a determine los coeficientes α y r_0 como función de la masa, energía y momento angular.

3-b Muestre que el parametro de impacto y el ángulo de escatering χ estan relacionados por

$$b^2 = \frac{k\,(\pi - \chi)^2}{E\chi\,(2\pi - \chi)},$$

donde E es la energía.

3-c Muestre que la seccion diferencial de escatering es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2 k\,(\pi - \chi)}{\chi^2\,(2\pi - \chi)^2\,E\sin\chi}$$

Tarea IX
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce Ayudante: Leonardo Gordillo

PACS numbers:

1) Propiedad espectral: Muestre que para un equilibrio y un equilibrio relativo estable los autovalores satisfacen que son simétricos con respecto al eje real e imaginario.

2)Péndulo de Tap-Thomson Una barra de longitud a está restringida a moverse sobre el plano XY con uno de sus extremos fijo. En el otro extremo una barra de longitud b puede rotar sobre su punto medio, pero siempre perpendicular a la barra a. En los extremos de la barra b se sujetan dos masas iguales de magnitud m. Las barras tienen masa despreciable (Péndulo de Tap-Thomson).

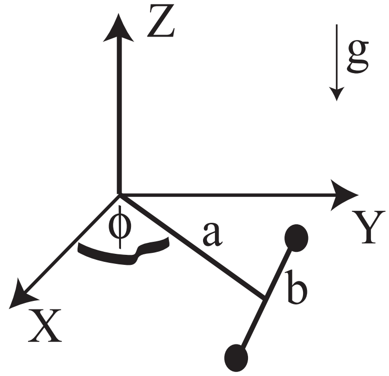


FIG. 1: Péndulo de Tap-Thomson

2-a Obtenga las ecuaciones de movimiento para el péndulo.
2-b Describa su movimiento. Encuentre puntos de equilibrio o equilibrio relativo y estudie su estabilidad.

3) Ecuaciones de Euler: Las ecuaciones de movimiento que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

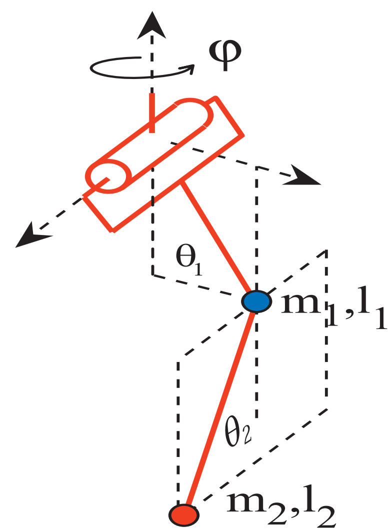
3-a ¿Este sistema es lagrangeano?

3-b Encuentre los puntos de equilibrio.

3-c Estudie la estabilidad de estos puntos.

3-e Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico.

4- Péndulo esféricodoble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



4-a Encuentre el Routhiano y el sistema reducido que describe este sistema.

4-b Calcule los equilibrios relativos de este sistema.

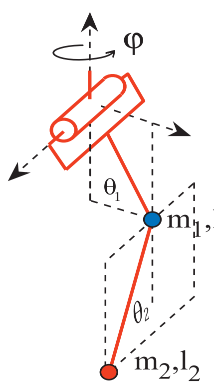
4-c Estudie las pequeñas oscilaciones entorno a los puntos de equilibrio.

Tarea IX
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce Ayudante: Leonardo Gordillo

PACS numbers:

1- Péndulo esférico doble corregido: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$ respectivamente, un soporte cilíndrico como se ilustra en la figura, Este soporte tiene un momento de inercia I con respecto al eje vertical, bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



1-a Encuentre el Routhiano y el sistema reducido que describe este sistema.

1-b Calcule los equilibrios relativos de este sistema.

1-c Estudie las pequeñas oscilaciones entorno a los puntos de equilibrio.

2) Modelo de epidemias de insectos: los insectos han sido un serio problema para la evolución de los bosques. Por ejemplo, en el este de Canada, el *Balsam fir* (un conífero candiense) es atacado en forma feroz por *budworm*, como consecuencia de esta epidemia los árboles pierden sus hojas y mueren. Ludwig y compañia[1] desarrollaron un modelo fenomenológico que describe la evolución de la población de budworm en la foresta, el cual tiene la forma

$$\frac{dN}{dt} = r_b \left(1 - \frac{N}{K_b}\right) N - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

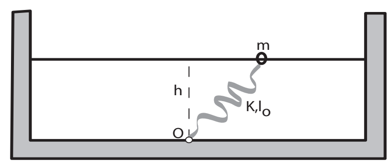
donde el último término da cuenta de la mortanlidad de los insectos debido a los depredadores naturales tales como pájaros. Note que éste, generaliza el modelo logístico.

2-a Interprete los distintos parámetros de la ecuación anterior.

2-b Adimensione la ecuación y encuentre los puntos de equilibrio del modelo [2].

2-c Calcular el diagrama de bifurcación en el espacio de parámetro, es decir, como función de los parámetros encuentre el número de soluciones estacionarias.

3) Anillo sobre un alambre horizontal: un anillo de masa m desliza sobre un alambre horizontal de largo L, bajo la influencia de un resorte el cual es amarrado al anillo, el otro extremo del resorte esta fijo en el punto O, ver figura. El resorte es caracterizado por una constante elástica k y largo natural l_o. La altura entre el alambre y el suelo es h, como lo muestra la figura.



3-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento del anillo?.

3-b Encuentre los equilibrios como función de los parámetros del sistema (k, l_o, m, Y h).

3-c Cuando uno varia el parámetro h, el sistema exhibe una inestabilidad. Caracterize esta inestabilidad.

4) Modelo Maxwell-Bloch El modelo más exitoso que da cuenta de la dinámica del laser es el modelo de Maxwell Bloch, en el cual los campos electromagneticos son tratados clasicamente y los átomos o molćulas son descrito cuanticamente como un sistema de dos niveles. Las ecuaciones que describen la envolvente del campo eléctrico $E(t)$, polarización $P(t)$, y la el número de átomos o molćulas exitadas $N(t)$ son

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \kappa(P - E), \\ \dot{P} &= \gamma_{\|}(EN - P), \\ \dot{N} &= \gamma_{\perp}(N_o - N - \mu EP). \end{aligned}$$

Donde κ es la tasa de decaimiento de la cavidad, $\gamma_{\|}$ es el decaimiento asociado a la colisión entre moléculas y $\gamma_{\perp}$ es el decaimiento espontáneo. N_o es el parámetro que describe la fuente de átomos o moléculas exitadas.

Encuentre los puntos de equilibrio y estudie las bifurcaciones exhibidas por el laser.

Tarea XI
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce   Ayudante: Leonardo Gordillo

PACS numbers:

1) Rodar: Sobre un plano inclinado rugoso de ángulo α se coloca un bloque cuadrado homogéneo de masa m, como se muestra en la figura. Dado que el plano es muy rugoso considere que solo puede rodar el bloque y no deslizar.

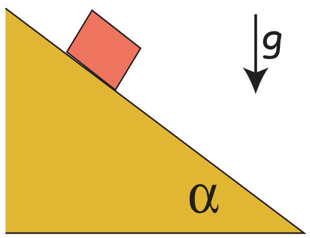


FIG. 1: Plano Inclinado

1-a Encuentre el ángulo crítico al partir del cual el bloque empieza a rodar.

1-b Estudie el espacio de fase de este sistema para distintos ángulos α. Grafique cualitativamente las diferentes trayectorias.

2) Bifurcación Andronov-Hopf-Poincare: Considere el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y - (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= \mu y + x - (x^2 + y^2)y \end{aligned}$$

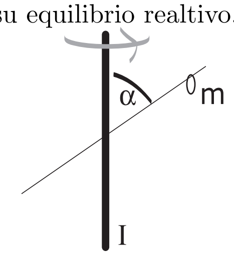
2-a Muestre que este sistema exhibe una bifurcación de Andronov-Hopf-Poincare cuando μ es variado.

2-b Después de ocurrir la bifurcación el sistema tiene como atractor una solución periódica (ciclo limite), encuentre la expresión analítica de este ciclo limite.

2-c Grafique el espacio de fase del sistema para valores de μ negativos y positivos.

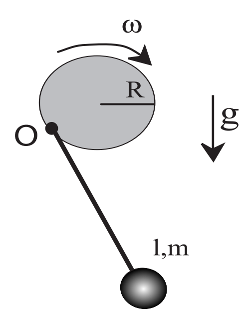
3) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 3). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.

3-a Muestre que este sistema presenta una bifurcación estacionaria para su equilibrio realtivo.



3-b Grafique el espacio de fase antes y después de la bifurcación.

4) Péndulo Forzado: considere un péndulo ideal de largo l y masa puntual m, bajo la influencia de un campo gravitacional constante g. El soporte del péndulo, representado por el punto O de la figura, esta soldado a una disco de radio R que gira con una velocidad angular ω, como es ilustrado en la figura.



4-a Encuentre el lagrangeano y la ecuación de movimiento que caracteriza al sistema.

4-b El péndulo en posición vertical es un equilibrio en el sistema movil, para este equilibrio. ¿Cuáles son las frecuencias críticas de disco, para la cual el péndulo en la posición vertical es inestable?

4-c ¿El sistema presenta una resonancia normal o paramétrica ?, a partir de las ecuaciones de movimiento justifique su respuesta.

[1] D. Ludwig, D. Jones, C.S. Holling, J. Anim. Ecol. 47, 315 (1978).

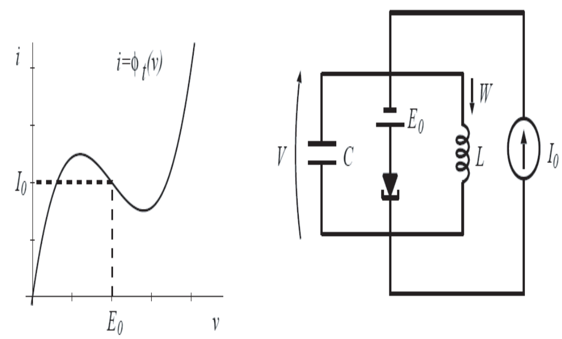
[2] resuelva geometricamente la ecuación algebraica.

Tarea XII
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce Ayudante: Leonardo Gordillo

PACS numbers:

1) Oscilador de van der Pol: En 1920, van der Pol construyo un circuito eléctrico–oscilador de van der Pol–compuesto por una bobina, capacitancia y un triodo (tubo de vacio). Este es uno de los primeros aparatos físicos que presenta auto oscilaciones. En la figura se ilustra el circuto y como varia la corriente como función del voltaje.



1-a Cual es la ecuación de movimiento que describe este circuito.
1-b Muestre como función de los parametros este sistema exhibe una bifurcación de Andronov-Hopf.

2) Identidad de Jacobi Los paréntesis de Poisson satisfacen la siguiente identidad

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$$

Demuestre esta propiedad.

3) Teorema de Poisson: Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H = q^1P_1 - q^2p_2 - a(q^1)^2 + b(q^2)^2,$$

donde a y b son constante.
3-a Muestre que las tres siguientes cantidades son conservadas

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{p_2 - bq^2}{q^1}, \\ f_2 &= q^1q^2, \\ f_3 &= q^1e^{-t}, \end{aligned}$$

3-b Estas constantes de movimientos son funcionalmente independientes
3-c Encuentre el número máximo de constantes independientes.

4) Sistema Hamiltoniano: Considere una partcula moviéndose en un plano bajo la influencia de un potencial generalizado (el cual depende explcitamente de la velocidad),

$$V = \frac{1+\dot{r}^2}{r},$$

donde r es la distancia radial al origen.
4-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.
4-b Analice la conservación de momento angular.
4-c Estudie el espacio de fase de este problema y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

Ejercicio I
Mecánica clasica (2008)

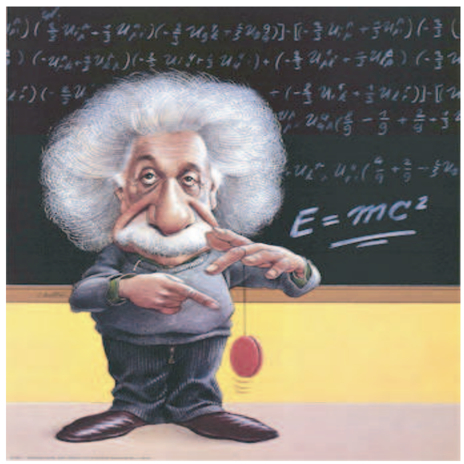
Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

PACS numbers:

Patícula libre: Considere una partícula de masa m libre de fuerzas externas, la cual es descrita por el lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right),$$

en coordenadas esférica.



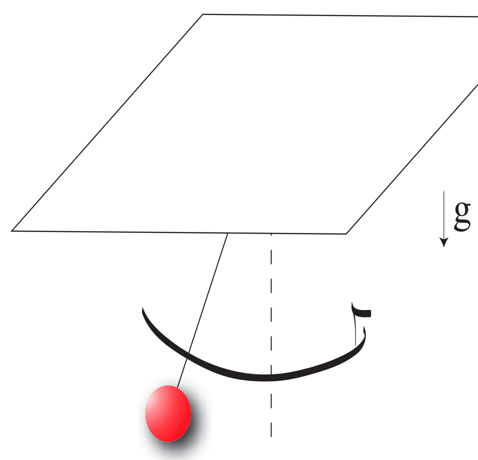
Encuentre en *estas variables* las simetría que deja invariante este lagrangeano, interprete fisicamente esta transformación y encuentre la cantidad conservada asociada a la transformación

Ejercicio II
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce

PACS numbers:

Fuerza central en el laboratorio: Con el objetivo de ilustrar las propiedades de las fuerzas centrales, Robert Hoocke, propone que un péndulo esférico (ver figura), el cual es equivalente a un problema de fuerzas central.



a) Muestre que las ecuaciones que describen el péndulo esférico efectivamente son equivalente a un problema de fuerzas centrales.

b) Muestre que las órbitas de este péndulo son cerradas.

Tarea XIII
Mecánica clásica (2008)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Suomi Ponce Ayudante: Leonardo Gordillo
Fecha de entrega Miercoles 9 de Julio.

PACS numbers:

I) Lea y resuma las secciones del Libro de Mecánica de Landau y Lifshitz: Teorema de Liouville, ecuación de Hamilton-Jacobi, y separación de variable.