Tarea I
Mecánica clasica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1)Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada: Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explcitamente del grado de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\mathrm{L}(q, q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} = \frac{d^l q(t)}{dt^l}$, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros.

1-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento que uno obtiene si uno minimiza la acción generada por el lagrangeano anterior ?

1-b ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

2) Lagrangeano para un sistema mecánico: A partir de las ecuaciones de Newton que describen un sistema mecánico que tiene N-variables cartesianas y N-n restricciones. Usando desplazamientos virtuales que respetan las restricciones, Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que el lagrangeano para un sistema mecánico tiene la forma

$$\mathrm{L} = T - V$$

donde T es la energía cinetica y V es la energía potencial.

3) Unicidad de lagangeanos Muestre que si considera un lagrangeano mas una derivada total, que tiene la forma

$$\mathrm{L'}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \mathrm{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{df(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{dt},$$

las ecuaciones de Euler-lagrange obtenida por cada lagrangeano son las mismas.

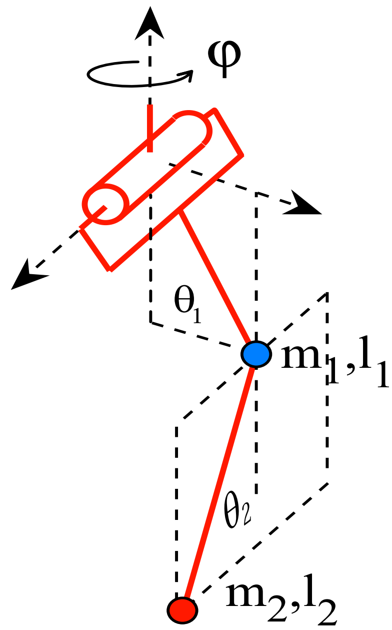
Escriba tres lagrangeanos diferentes (no triviales) que describen un péndulo esférico.

4 Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.

4-a¿Cuál es el lagrangeano que caracteriza a este sistema?

4-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

4-c ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema e interprte fisicamente los diferentes términos de las ecuaciones de movimiento?



Tarea 11
Mecánica Clásica

Prof. Marcel Clerc G.
Aux. Claudio Falcón B.

1.- Variables de acción en el problema de Kepler:
Calcule las variables de acción J_r, J_θ y J_ϕ para el problema de fuerzas centrales con potencial

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}$$

Cuales son las frecuencias propias del sistema?. Comente.

2.- Perturbación de un sistema integrable:
Considere un sistema integrable $H_0(\mathbf{J})$ cuyas variables de acción ángulo son $\mathbf{J}, \mathbf{w}$. Si pertutbamos este sistema su Hamiltoniano es ahora de la forma

$$H(\mathbf{J}, \mathbf{w}) = H_0(\mathbf{J}) + \epsilon H_1(\mathbf{J}, \mathbf{w})$$

Se busca una transformación canónica a un nuevo set de variables de acción ángulo $\mathbf{J}', \mathbf{w}'$. Escriba una ecuación tipo Hamilton-Jacobi para la función generadora $S(\mathbf{J}', \mathbf{w})$de esa transformación canónica. Busque soluciones de la forma

$$S(\mathbf{J}', \mathbf{w}) = S_0(\mathbf{J}', \mathbf{w}) + \epsilon S_1(\mathbf{J}', \mathbf{w}) + \epsilon^2 S_2(\mathbf{J}', \mathbf{w}) + ... \tag{1}$$

Escriba la ecuación para el orden cero y para el primer orden en ϵ (Como esta expansión formal en ϵ es solución para todo valor de epsilon entonces a cada orden se debe tener una igualdad). Obtenga S_0 y S_1. Para obtener S_1 descomponga en serie de Fourier $H_1(\mathbf{J}', \mathbf{w})$ y $S_1(\mathbf{J}', \mathbf{w})$ (pues son funciones periódicas de cada variable $\omega_i = (\mathbf{w})_i$).

$$H_1 = \sum_{\mathbf{m}} H_{1,\mathbf{m}}(\mathbf{J}') \exp(i\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}) \quad y \quad S_1 = \sum_{\mathbf{m}} S_{1,\mathbf{m}}(\mathbf{J}') \exp(i\mathbf{m} \cdot \mathbf{w})$$

Resolviendo deberá obtener

$$S_1 = i \sum_{\mathbf{m}} \frac{H_{1,\mathbf{m}}(\mathbf{J}')}{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}_\mathbf{0}(\mathbf{J}')} \exp(i\mathbf{m} \cdot \mathbf{w})$$

donde $\boldsymbol{\nu}_\mathbf{0}$ es el vector formado por las frecuancias del sistema no perturbado. Bajo que condiciones esta serie diverge? (sea cualitativo); que significado tiene este hecho?
Nota: Aparte del problema de la convergencia de S_1 hay un problema con la convergencia en ϵ. Discuta.

3.- Mapeos y caos: Un mapeo puede verse como una aplicación que toma un conjunto de puntos a otro. Considere dos mapeos distintos,

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_{n+1}), \qquad 0 \leq x_n \leq 1$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2\mu x_n & \qquad 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ x_{n+1} &= 2\mu(1 - x_n) & \qquad 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{aligned}$$

Donde $0 \leq \mu \leq 1$ y $0 \leq a \leq 4$. Estudie la existencia, estabilidad y bifurcaciones de los puntos fijos y las órbitas peiódicas para diversos valores de los parámetros. Tome especial cuidado cuando $1/2 \leq \mu \leq 1$ y $3 \leq a \leq 4$. Cuantos puntos fijos existen?. Cuantas órbitas periódicas existen?. Cuales son sus períodos?.
Utilice todas las herramientas matemáticas y computacionales que les resulten útiles.

Tarea X
Mecánica clásica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1) Oscilador: Considere oscilador armónico caracterizado por una frecuencia de oscilación ω y el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k^2}{2}q$$

Encuentre explicitamente la forma que toma $q(t)$ y $p(t)$ usando el método de composición de transformaciones canónicas infinitesimales visto en clase.

2) Algebra de momentos angulares Usando las propiedades de las variables conjudadas en los paréntesis de poisson. Muestre que

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

donde L_i es la i-esima componente del momento angular $\vec{L}$, ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-civita, es decir, el tensor es 1 cuando los indices están ordenados en forma cíclica, -1 cuando estan en forma anti-cíclica y cero cuando se repite al menos un indice. Además muestre que se satisface

$$\{\vec{L}^2, \vec{L} \cdot \vec{n}\} = 0,$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario.

L_z es el generador infinitesinal de rotaciones en el espacio. Cuál es el efecto de este generador sobre las variables momentun generalizadas.

3) Trompo con púa fija: Considere un trompo simétrico con púa fija, es decir, el momento de inercia en la dirección vertical es distinto.

3-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.

3-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema y deduzca el Routhiano que caracteriza la dinámica de este sistema.

3-c Estudie el espacio de fase de este sistema reducido y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

3-d Usando el teorema de Hamilton-Noether encuentre las transformaciones infinitesimales que dejan invariante la dinámica del trompo simétrico con púa fija.

4) Partícula cargada en un campo magnético, Landau Gauge: Usando el método de Hamilton Jacobi analize[1] el problema de una partícula cargada bajo la influencia de un campo magnético, la cual es descrita por el Hamiltoniano

$$H(x, y, P_x, P_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - eBx)^2}{2m}$$

donde e y m son la carga y la masa de la partícula. B es el campo magnético. Además estudie el espacio de fase de este sistema.

---

[1] Es decir, encuentre explicitamente las soluciones, calcule la acción y encuentre las cantidades conservadas

Tarea IX
Mecánica clásica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1) Teorema de Poisson: Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H = q^1 P_1 - q^2 p_2 - a(q^1)^2 + b(q^2)^2,$$

donde a y b son constante.

1-a Muestre que las tres siguientes cantidades son conservadas

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{p_2 - bq^2}{q^1}, \\ f_2 &= q^1 q^2, \\ f_3 &= q^1 e^{-t}, \end{aligned}$$

1-b Estas constantes de movimientos son funcionalmente independientes

1-c Encuentre el número máximo de constantes independientes.

2) Identidad de Jacobi Los paréntesis de Lagrange satisfacen la siguiente identidad

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\{x^b, x^c\} + \frac{\partial}{\partial x^c}\{x^a, x^b\} + \frac{\partial}{\partial x^b}\{x^c, x^a\} = 0.$$

donde $x^\mu = (\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$. Demuestre esta propiedad.

3) Sistema Hamiltoniano: Considere una partcula moviéndose en un plano bajo la influencia de un potencial generalizado (el cual depende explcitamente de la velocidad),

$$V = \frac{1 + \dot{r}^2}{r},$$

donde r es la distancia radial al origen.

3-a Encuentre el Hamiltoniano que describe este sistema.

3-b Analice la conservación de momento angular.

3-e Estudie el espacio de fase de este problema y describa cualitativamente la dinámica de este sistema.

4) Partícula cargada: Una partícula cargada en un campo electromagnético es descrita por el Lagrangeano

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^\beta \dot{q}^\beta - e\phi(q,t) + e\dot{q}^\beta A_\beta(q,t),$$

donde q, e y m son la posición, la carga y la masa de la partícula, $\phi(q,t)$ y $A_\beta(q,t)$ son el potencial eléctrico y el potencial vectorial magnético.

4-a Encuentre Hamiltoniano que describe este sistema.

4-b Encuentre las ecuaciones de movimiento (Ecuaciones de Hamilton) e interprete los terminos que obtenga.

5) Relativad: Encuentre el Hamiltoniano que describe una partícula libre relativista.

Tarea VIII
Mecánica clásica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1) Bifurcación Andronov-Hopf-Poincare: Considere el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x$$
$$\dot{y} = \mu y + x - (x^2 + y^2)y$$

1-a Muestre que este sistema exhibe una bifurcación de Andronov-Hopf-Poincare cuando μ es variado.

1-b Después de ocurrir la bifurcación el sistema tiene como atractor una solución periódica (ciclo limite), encuentre la expresión analítica de este ciclo limite.

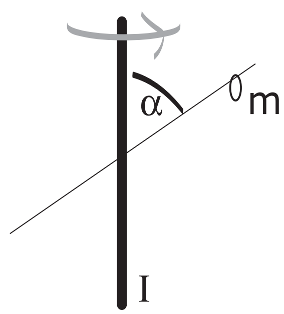
1-c Grafique el espacio de fase del sistema para valores de μ negativos y positivos.

2) Identidad de Jacobi Los paréntesis de Poisson satisfacen la siguiente identidad

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Demuestre esta propiedad.

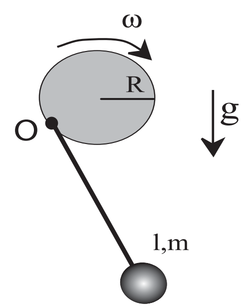
3) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 3). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.



3-a Muestre que este sistema presenta una bifurcación estacionaria para su equilibrio realtivo.

3-b Grafique el espacio de fase antes y después de la bifurcación.

4) Péndulo Forzado: considere un péndulo ideal de largo l y masa puntual m, bajo la influencia de un campo gravitacional constante g. El soporte del péndulo, representado por el punto O de la figura, esta soldado a una disco de radio R que gira con una velocidad angular ω, como es ilustrado en la figura.



4-a Encuentre el lagrangeano y la ecuación de movimiento que caracteriza al sistema.

4-b El péndulo en posición vertical es un equilibrio en el sistema movil, para este equilibrio. ¿Cuáles son las frecuencias críticas de disco, para la cual el péndulo en la posición vertical es inestable?

4-c ¿El sistema presenta una resonancia normal o paramétrica ?, a partir de las ecuaciones de movimiento justifique su respuesta.

Tarea VII
Mecánica clásica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1) Anillo sobre un alambre Inclinado: un anillo de masa m desliza sobre un alambre inclinado de largo L y ángulo α, bajo la influencia de un resorte el cual es amarrado al anillo. El otro extremo del resorte esta fijo en el punto O, ver figura. El resorte es caracterizado por una constante elástica k y largo natural l_o. La altura entre el alambre y el suelo es h, como lo muestra la figura.

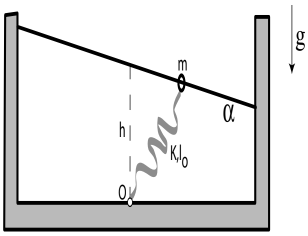


FIG. 1: Bifutrcación Imperfecta

1-a ¿Cuál es la ecuación de movimiento del anillo?.

1-b Encuentre los equilibrios como función de los parámetros del sistema (k, l_o, m, h, α y μ).

1-c Si uno considera que el movimiento del anillo esta sobre amortiguado, es decir, el alambre esta lubricado por lo tanto sobre el anillo se ejerce una fuerza viscosa ($F = -\mu \dot{v}, \mu \gg 1$, v es la velocida). Clasifique la estabilidad de los puntos de equilibrio como funcion ed h.

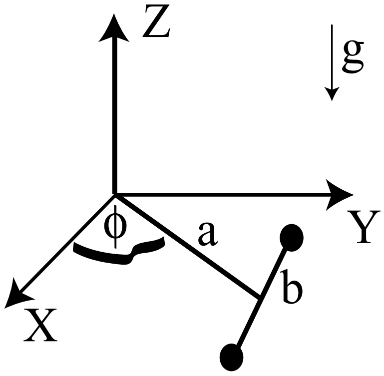


FIG. 2: Péndulo de Tap-Thomson

2)Péndulo de Tap-Thomson Generalizado Una barra de longitud a está restringida a tener uno de sus extremos fijo al ogigen de cordenadas (ver figura). En el otro extremo una barra de longitud b puede rotar sobre su punto medio, pero siempre perpendicular a la barra a. En los extremos de la barra b se sujetan dos masas iguales de magnitud m. Las barras tienen masa despreciable (Péndulo de Tap-Thomson).

2-a Obtenga las ecuaciones de movimiento para el péndulo.

2-b Calcule el Routhiano que caracteriza a este sistema y encuentre el sistema reducido.

2-c Encuentre los puntos de equilibrio y estudie su estabilidad.

3) Rodar: Sobre un plano inclinado rugoso de ángulo α se coloca un bloque cuadrado homogéneo de masa m, como se muestra en la figura. Dado que el plano es muy rugoso considere que solo puede rodar el bloque y no deslizar.

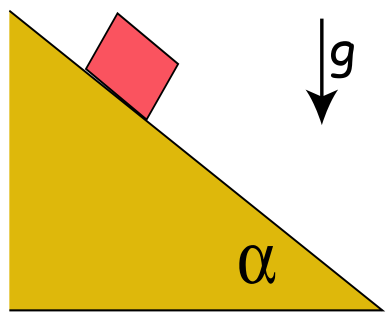


FIG. 3: Plano Inclinado

3-a Encuentre el ángulo crítico al partir del cual el bloque empieza a rodar.

3-b Estudie el espacio de fase de este sistema para distintos ángulos α. Grafique cualitativamente las diferentes trayectorias.

Tarea VI
Mecánica clásica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1) Propiedad espectral: Muestre que para un equilibrio y un equilibrio relativo estable los autovalores satisfacen que son simétricos con respecto al eje real e imaginario.

2)Péndulo de Tap-Thomson Una barra de longitud a está restringida a moverse sobre el plano XY con uno de sus extremos fijo. En el otro extremo una barra de longitud b puede rotar sobre su punto medio, pero siempre perpendicular a la barra a. En los extremos de la barra b se sujetan dos masas iguales de magnitud m. Las barras tienen masa despreciable (Péndulo de Tap-Thomson).

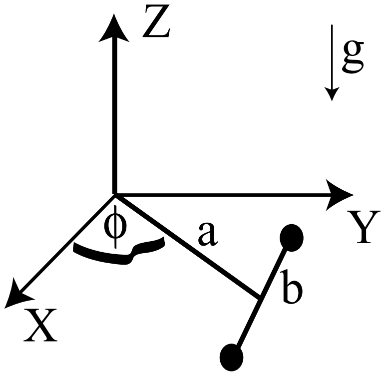


FIG. 1: Péndulo de Tap-Thomson

2-a Obtenga las ecuaciones de movimiento para el péndulo.
2-b Describa su movimiento. Encuentre puntos de equilibrio o equilibrio relativo y estudie su estabilidad.

3) Oscilador no lineal: Consideremos una partícula de masa m cargada con una carga negativa q, en las proximidades de una placa infinita cargada con una densidad de carga positiva $\sigma\ C/m^2$.

En la placa se ha hecho un pequeño agujero para que pueda pasar la partícula cargada, tal como se muestra en la figura

La fuerza que ejerce el campo eléctrico producido por una placa plana sobre la carga negativa q, es constante en módulo y de sentido contrario al campo eléctrico

$$F = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} q$$

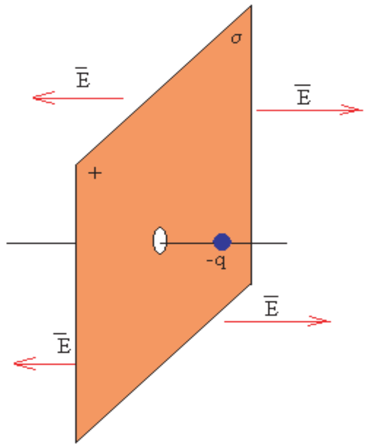


FIG. 2: Oscilador eléctrico

3-a Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.
3-b Calcule el período de oscilación de la carga eléctrica en función de la amplitud inicial.

4) Flotador Un cilindro sólido de radio r, altura h y masa m cuelga de un resorte de constante k, parcialmente sumergido en agua, como muestra la figura.

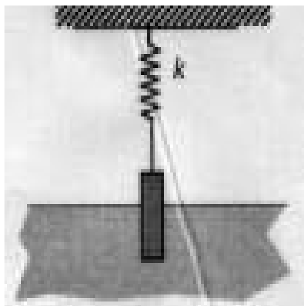


FIG. 3: Flotador

4-a Calcule el período para pequeñas oscilaciones del cilindro a lo largo de la vertical.
4-b En caso de considera un cono en vez del cilindro. El cono esta caracterizado por un ángulo α y altura h, como se modifica el período de oscilación.

Tarea V
Mecánica clásica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1) Péndulo de Andronov: Considere un aro de radio R el cual puede girar con respecto al pivote vertical en A (cf. Figura). El aro no tiene momento de inercia ($I = 0$). Sobre el aro hay un anillo de masa m, el cual puede deslizarse sin roce sobre el aro (Ver figura).

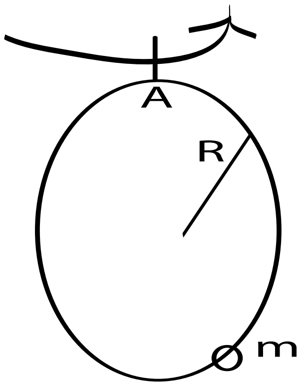


FIG. 1: Péndulo de Andronov

1-a Encuentre las ecuaciones de movimiento que caracterizan al sistema.

1-b Para los distintos valores del momento angular, encuentre los equilibrios relativos y explique como aparecen y desaparecen.

1-c Estudie la estabilidad de estros equilibrios relativos.

1-d En caso que el aro este lubricado, que pasa con la estabilidad de los puntos de equilibrio. Dibuje el espacio de fase.

2) Ecuaciones de Euler: Las ecuaciones que describen un sólido rígido libre fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

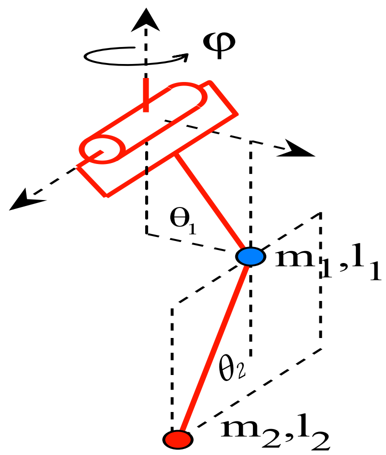
2-a ¿Este sistema es lagrangeano?

2-b Encuentre los puntos de equilibrio.

2-c Estudie la estabilidad de estos puntos.

2-e Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico.

3 Péndulo esférico doble: Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = L_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante (g). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio l_1. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.



3-a Encuentre el Routhiano y el sistema reducido que describe este sistema.

3-b Calcule los equilibrios relativos de este sistema.

3-c Estudie las pequeñas oscilaciones entorno a los puntos de equilibrio.

Tarea IV
Mecánica clásica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1)Ecuación de Newton Covariante: Partiendo del lagrangiano

$$L_{cuad}[q^i(t), \dot{q}^i(t)] = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q^i)$$

a) Muestre que las ecuaciones de movimiento para cada una de las coordenadas generalizadas q^i tienen la forma

$$g_{ij}(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l) = -\frac{\partial U(q^l)}{\partial q^i}$$

donde los símbolos de Christoffel se definen como $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\frac{\partial g_{li}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l})$

b)Cual es la ecuación de movimiento si cambiamos el lagrangiano $L_{cuad}[q^i(t), \dot{q}^i(t)]$ por

$$L_{raiz}[q^i(t), \dot{q}^i(t)] = \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} - U(q^l)$$

Se pueden obtener las mismas ecuaciones que con el nuevo lagrangiano $L_{cuad}[q^i(t), \dot{q}^i(t)]$? Qué significa esto?.

2)Precesión de Mercurio: Uno de los hechos experimentales que contradicen la teoría de la gravedad de Newton es la precesión de la órbita de Mercurio. Su órbita no es una elipse propiamente tal, sino una que precesa con respecto a un eje. Para notar este cambio, se plantea perturbar el potencial de Kepler, $U(r) = -\alpha/r$, con

$$\delta U(r) = \frac{\beta}{r^3}$$

Con este nuevo potencial, calcule explicitamente la órbita de Mercurio y la precesión de la velocidad angular (puede usar las aproximaciones que estime conveniente, siempre y cuando estén justificadas). Investigue los valores de la precesión de la órbita y de la velocidad angular, y calcule el valor de β. Esta correción la entrega naturalemente la

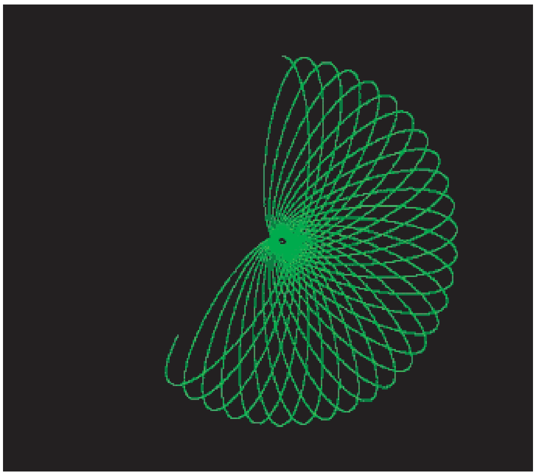


FIG. 1: Simulación de la precesión de la órbita de Mercurio

teoría de la relatividad de Einstein.

3)Sección Eficaz de Scattering: Calcule la sección eficaz diferencial y la seccón eficaz total de scattering para los potenciales $U(r) = \frac{\beta}{r^2}$, $U(r) = \frac{\beta r^2}{2}$ y $U(r) = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i r^i}{r^3}$.

4)Trayectorias en el Laboratorio: El análisis hecho en clases está expresado en el sistema de centro de masas. Exprese los resultados, es decir, las trayectorias de las partículas en el sistema de referencia del laboratorio, donde las velocidades iniciales de las masas m_1 y m_2 son $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$, respectivamente.

Tarea III
Mecánica clásica (2005)

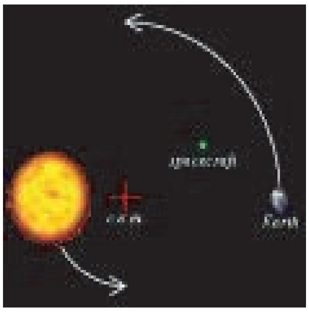
Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1)Ecuaciones de Newton: Calcule los simboles de Cristoffell y escriba las ecuaciones de Newton en las siguientes cordenadas

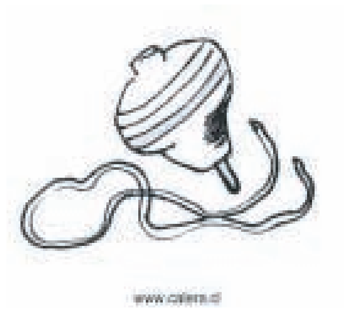
1-a Cilíndricas.
1-b Esféricas.
1-c Parabólicas.

2) Problema de Kepler: Considere el problema de interacción de gravitacional de dos cuerpos.



2-a Encuentre el lagrangeano y la acción de este sistema.
2-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

3) Trompo con pua Fija Considere un trompo simétrico de masa M, momentos de inercia $I_1 = I_2 = I$, I_3 con respecto a los ejes principales. El centro de Masa se ubica a una distancia l de la púa (ver figura), la cual es representada por el punto O. En el Caso que la púa este fija



3-a ¿Cuál es la velocidad angular del trompo?
3-b ¿Cuál es la acción que describe a este sistema?
3-c Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

Tarea II
Mecánica clasica (2005)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar: Claudio Falcón

PACS numbers:

1)Espacio de Fase: Un sistema mecánico esta descrito por el siguiente lagrangeano

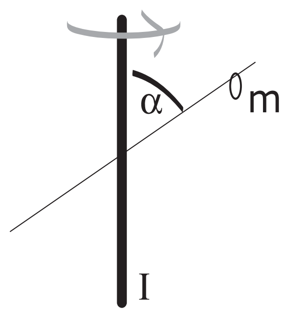
$$\mathrm{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \varepsilon\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4},$$

donde m es la masa y ε un parámetro de control.

1-a ¿Variando la acción encuentre la ecuación de movimiento?

1-b Para ε positivo o negativo, dibuje el espacio de fase[**?**].

2) Vara Mágica: Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia I con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (vertical, ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo α con la barra vertical (ver figura 3). Considere un anillo de masa m sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.



2-a Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

2-b Encuentre (gráficamente) los puntos de equilibrio del sistema (equilibrios relativos), estudie la estabilidad de éstos.

2-c En el caso que la condición inicial engendre un pequeño momento angular en la dirección vertical, describa cualitativamente cual es el movimiento del anillo. Y en el caso que engendre una gran momento angular que prodría ocurrir con el anillo?.

3) Principio de Fermat La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio: "El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos" (PRINCIPIO DE FERMAT). Si $v(x, y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio (por simplicidad considere el plano $\{x, y\}$).

3-a Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de fermat.

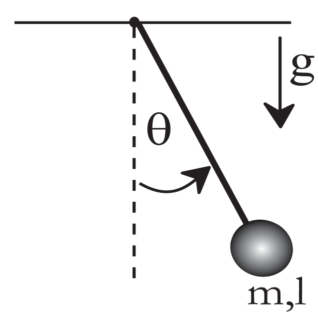
3-b Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuuación[**?**]

3-c Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = cy$. ¿que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?

4) Sistema disipativo: Considere un péndulo plano el cual esta compuesto por una ésfera y cuerda ideal de masa m y largo l. Como consequencia de la presencia del aire este ejerce una fuerza proporcional a la velocidad caracterizada por un coeficiente de amortiguamiento ν, es decri las ecuación de movimiento del péndulo toma la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta) - \nu\dot{\theta}$$

4-a Encuentre la acción que caracteriza a este sistema.



[] Indicación grafique númericamente las trayectorias.

[] Recomendacion: A partir del principio de fermat deduzca la ley de Snell, usando esta ley trate de interpretar su resultado.