# Control II
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Todos sus argumentos deberán estar claramente explicitados
Tiempo=5 Hrs.

## I. SÓLIDO RÍGIDO

Las ecuaciones que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

donde $\vec{\Omega}$ y $\vec{L}$ son, respectivamente, la velocidad angular y momentun angular.

**1-a** ¿En la representación de ejes principales del sólido rígido la ecuación anterior es lagrangeana? si lo es, encuentre su respectivo lagrangeano y sus respectivas cantidades conservadas.

**1-b** Encuentre los puntos de equilibrio de este sistema y estudie su respectiva estabilidad.

**1-c** ¿Que forma debería tener un término de disipación en la ecuación anterior para que el modulo del momento angular se conserve? Que forma toma el espacio de fase en este caso.

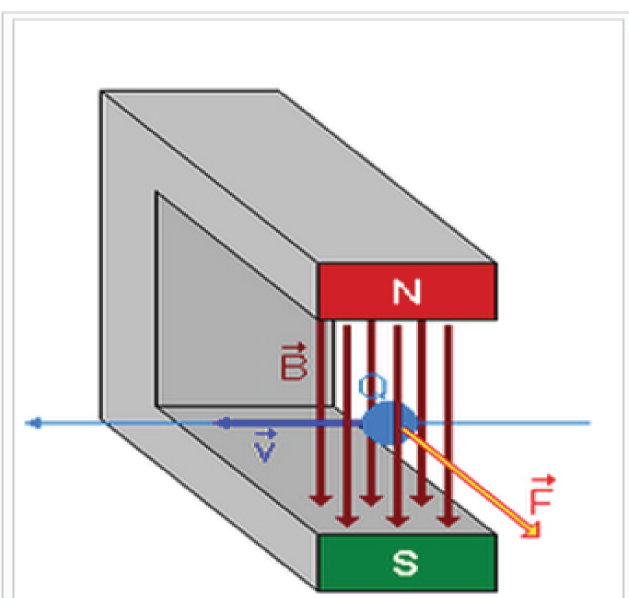



FIG. 1: Partícula cargada.

## II. PARTÍCULA CARGADA

Considere una partícula de masa $m$ y carga $q$ bajo la influencia de una campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$ (ver figura).

**2-a** Encuentre el lagrangeano que describe este sistema, deduzca las ecuaciones de movimiento y caracterice la cantidades conservadas de este sistema.

**2-b** Muestre que este sistema tiene un equilibrio relativo y estudie su estabilidad.

**2-c** En caso que la partícula se mueve al interior de un fluido, modele el efecto del amortiguamiento y encuentre el lagrangeano que describe este efecto.

## III. PÉNDULO DE KAPITZA

Considere un péndulo ideal de masa $m$ y largo natural $l$, el cual esta suspendido sobre un pivote que oscila verticalmente de manera armónica ($Y(t) = A\cos(\omega t)$). Si el ángulo que forma el el péndulo y la vertical es $\theta$ (ver figura).

**1-a** Encuentre el lagrangeano que describe el sistema.

**1-b** Muestre que para frecuencias altas existe una amplitud de oscilación tal que el péndulo invertido es estable (resultado derivado rigurosamnete por Stephenson 1908, y posteriormente deducido en forma intuitiva por Kapitza).

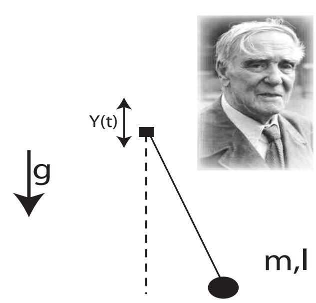



FIG. 2: Péndulo de Kapitza.

# Ejemplo examen calificación

Profesor: Marcel G. Clerc
Todos sus argumentos deberán estar claramente explicitados

PACS numbers:

## I. ÓRBITA DE HOOKE

Con el objetivo de estudiar en forma intuitiva las fuerzas centrales de cuerpos celestes, Hooke propone estudiar un péndulo esférico, formado por una cuerda ideal de largo $l$ y masa puntual $m$ (ver figura)

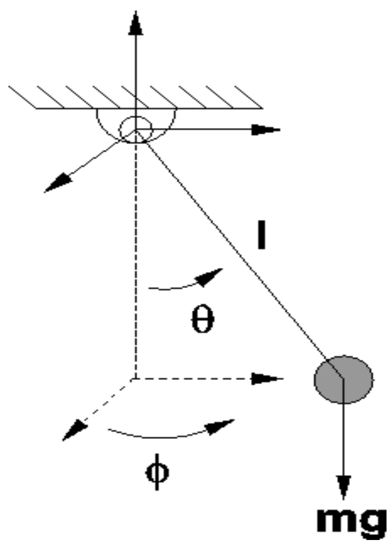



FIG. 1: Péndulo esférico.

**1-a** Muestre que las orbitas descritas por el péndulo esférico son cerradas y calcule su periodo.

**1-b** Con el objetivo de hacer una mímica de un tercer cuerpo celeste, Hooke considera dos péndulos esféricos, es decir, sobre el péndulo anterior en la masa puntual $m$ se cuelga otro péndulo esférico ideal de largo $l_1$ y masa $m_1$, escriba las ecuaciones de movimiento y muestre que este sistema no es integrable.

## II. RELOJ DE HUYGENS, TAUTOCRONA

Con el objetivo de desarrollar un reloj tipo péndulo que no cambie su periodo, es decir, que fuera *isocrono*, se logro desarrollar el siguiente sistema, $Tautocrona$: considere una partícula que se desliza sin roce sobre la superficie de una cicloide bajo la influencia de la gravedad $(g)$, la cual se parametriza por

$$x = r(\phi + \sin\phi) \tag{1}$$
$$y = r(1 - \cos\phi) \tag{2}$$

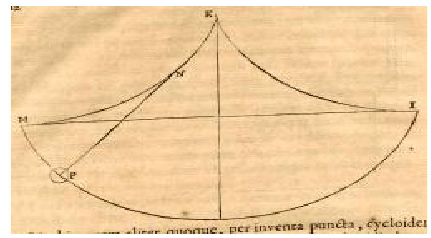


FIG. 2: Representación de la tautocroma en distintos instantes de tiempo.

donde $\{x, y\}$ son coordenadas cartesianas que representan respectivamente la dirección horizontal y vertical, y $\{r, \phi\}$ son las coordenadas polares.

**2-a** Muestre que a pesar que este sistema es un oscilador no lineal el periodo de oscilación no depende de la amplitud y vale $\pi\sqrt{r/g}$ .

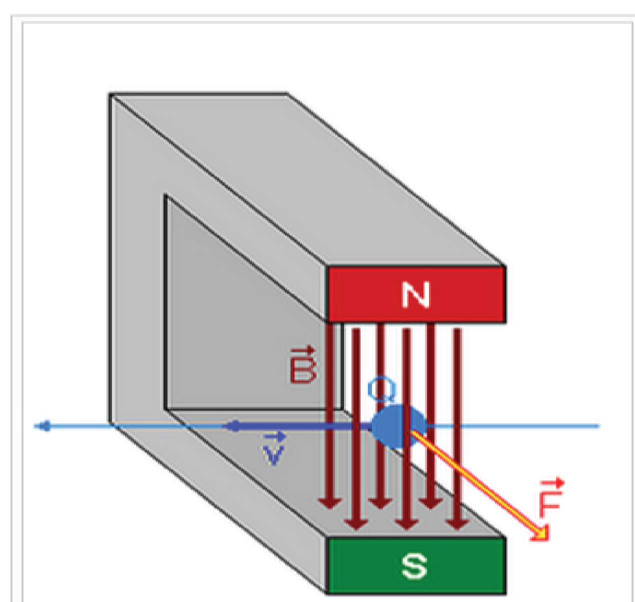



FIG. 3: Partícula cargada.

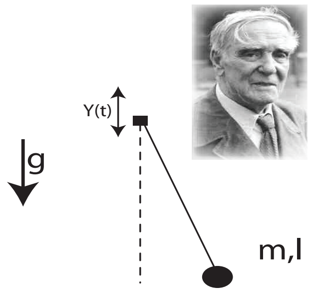



FIG. 4: Péndulo de Kapitza.

## III. SÓLIDO RÍGIDO

Las ecuaciones que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

donde $\vec{\Omega}$ y $\vec{L}$ son, respectivamente, la velocidad angular y momentun angular.

**1-a** ¿En la representación de ejes principales del sólido rígido la ecuación anterior es lagrangeana? si lo es, encuentre su respectivo lagrangeano y sus respectivas cantidades conservadas.

**1-b** Encuentre los puntos de equilibrio de este sistema y estudie su respectiva estabilidad.

**1-c** ¿Que forma debería tener un término de disipación en la ecuación anterior para que el modulo del momento angular se conserve? Que forma toma el espacio de fase en este caso.

## IV. PARTÍCULA CARGADA

Considere una partícula de masa $m$ y carga $q$ bajo la influencia de una campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$ (ver figura).

**2-a** Encuentre el lagrangeano que describe este sistema, deduzca las ecuaciones de movimiento y caracterice la cantidades conservadas de este sistema.

**2-b** Muestre que este sistema tiene un equilibrio relativo y estudie su estabilidad.

**2-c** En caso que la partícula se mueve al interior de un fluido, modele el efecto del amortiguamiento y encuentre el lagrangeano que describe este efecto.

## V. PÉNDULO DE KAPITZA

Considere un péndulo ideal de masa $m$ y largo natural $l$, el cual esta suspendido sobre un pivote que oscila verticalmente de manera armónica ($Y(t) = A\cos(\omega t)$). Si el ángulo que forma el el péndulo y la vertical es $\theta$ (ver figura).

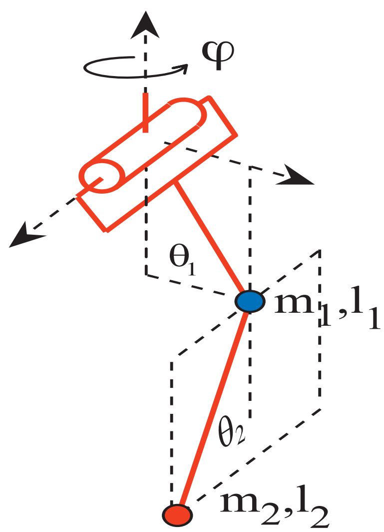
**1-a** Encuentre el lagrangeano que describe el sistema.

**1-b** Muestre que para frecuencias altas existe una amplitud de oscilación tal que el péndulo invertido es estable (resultado derivado rigurosamnete por Stephenson 1908, y posteriormente deducido en forma intuitiva por Kapitza 1950).

# Tarea XI
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc

**1- Péndulo esférico doble:** Considere un sistema mecánico formado por dos péndulos de masas y largos $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$ respectivamente (ver figura), bajo la influencia de un campo gravitacional constante ($g$). El primer péndulo es esférico, es decir, el movimiento de este péndulo se desarrolla sobre la superficie de una esfera de radio $l_1$. El péndulo inferior es un péndulo plano restringido a moverse en el plano ortogonal del primer péndulo como se muestra en la figura.




**1-a** Encuentre el Routhiano y el sistema reducido que describe este sistema.

**1-b** Calcule los equilibrios relativos de este sistema.

**1-c** Estudie las pequeñas oscilaciones entorno a los puntos de equilibrio.

**2.- Rodar:** Sobre un plano inclinado rugoso de ángulo $\alpha$ se coloca un bloque cuadrado homogéneo de masa $m$, como se muestra en la figura. Dado que el plano es muy rugoso considere que solo puede rodar el bloque y no deslizar.

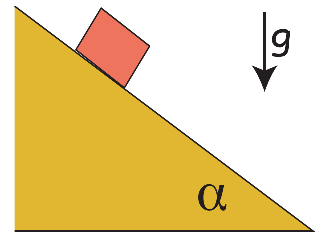



FIG. 1. Plano Inclinado

**2-a** Encuentre el ángulo crítico al partir del cual el bloque empieza a rodar.

**2-b** Estudie el espacio de fase de este sistema para distintos ángulos $\alpha$. Grafique cualitativamente las diferentes trayectorias.

**3.- Flotador** Un cilindro sólido de radio $r$, altura $h$ y masa $m$ cuelga de un resorte de constante $k$, parcialmente sumergido en agua, como muestra la figura.

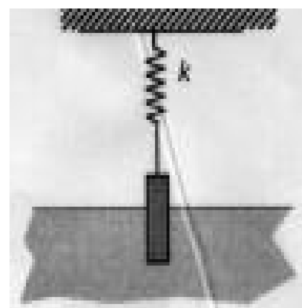



FIG. 2. Flotador

**3-a** Calcule el período para pequeñas oscilaciones del cilindro a lo largo de la vertical.

**3-b** En caso de considera un cono en vez del cilindro. El cono esta caracterizado por un ángulo $\alpha$ y altura $h$, como se modifica el período de oscilación.

**4) Ecuaciones de Euler:** Las ecuaciones de movimiento que describen un sólido rígido libre de fuerza exteriores son las ecuaciones de Euler, las cuales tienen la forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

**3-a** ¿Este sistema es lagrangeano?
**3-b** Encuentre los puntos de equilibrio.
**3-c** Estudie la estabilidad de estos puntos.
**3-e** Dibuje el espacio de fase de este sistema dinámico.

# Tarea X
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc

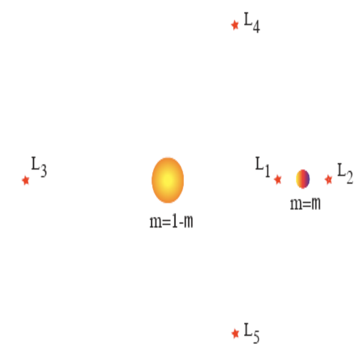



FIG. 1. -Puntos de libración.

**1.-Puntos de libración:** Analice la estabilidad de los puntos de libración del problema de tres cuerpos ($L1; L2; L3; L4; L5$), es decir aquellos puntos de equilibrio encontrado en el problema restringido de dos cuerpos

**2.- Partícula de Shilnikov:** Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia $I$ con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en esta dirección (ver figura 2). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercia (despreciables), la cual forma un ángulo $\alpha$ con la barra vertical (ver figura 2). Considere un anillo de masa $m$ sobre la vara la cual tiene un lubricante que hace que el movimiento del anillo es sobre amortiguado.

**2-a** Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

**2-b** Como función del momento angular vertical caracterice la dinámica de este sistema. Particularmente, caracterice las inestabilidades de los puntos de equilibrio.

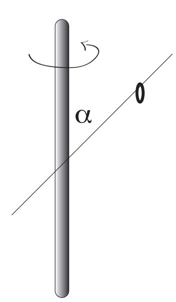



FIG. 2. Partícula de Shilnikov.

**3.-Péndulo de Foucault:** Muestre que la posición vertical de un péndulo de Foucault es inestable.

FIG. 3. Péndulo de Foucault.

**4.-Péndulo de Tap-Thomson** Una barra de longitud $a$ está restringida a moverse sobre el plano $XY$ con uno de sus extremos fijo. En el otro extremo una barra de longitud $b$ puede rotar sobre su punto medio, pero siempre perpendicular a la barra $a$. En los extremos de la barra $b$ se sujetan dos masas iguales de magnitud $m$. Las barras tienen masa despreciable (Péndulo de Tap-Thomson).

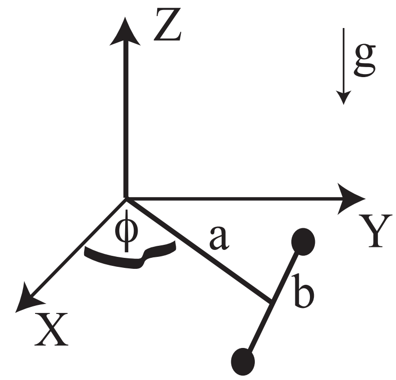



FIG. 4. Péndulo de Tap-Thomson

**4-a** Obtenga las ecuaciones de movimiento para el péndulo.

**4-b** Describa su movimiento. Encuentre puntos de equilibrio o equilibrio relativo y estudie su estabilidad.

# Tarea VIII
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc

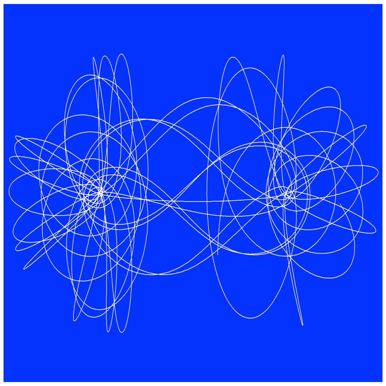


FIG. 1. -Problema de Euler Generalizado.

**1.-Problema de Euler Generalizado:** Considere la siguiente generalización del problema restringido de Euler por medio de realizar la siguiente modificación: los dos cuerpos celestes masivos no realizan una órbita circular sino una de tipo elíptica.

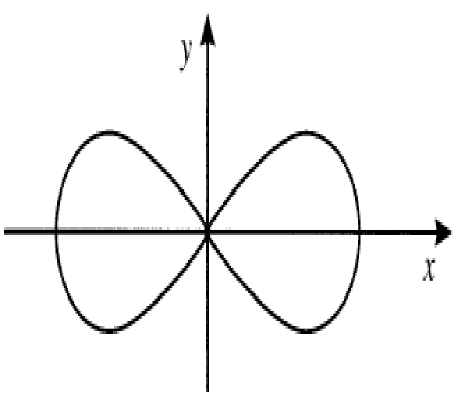



FIG. 2. Órbita antifaz.

**1-a)** Encuentre la ecuación de movimiento para el tercer cuerpo pequeño.

**1-b)** ¿Este sistema tiene una función de Jacobi ? en caso de encontrar una cantidad interprete su significado físico.

**1-c)** Simule numéricamente las ecuaciones encontradas e ilustre algunas trayectorias. Particularmente, uno de los mayores avances del siglo pasado fue el estudio de Poincaré del problema de tres cuerpos, caracterice el tipo de órbitas e ilustre que son caóticas.

**2.-Puntos colineales::** Para el problema restringido de dos cuerpos de Euler estime analíticamente los puntos colineales, es decir aquellos puntos de equilibrio que se encuentran entre los dos cuerpos celestes—explicite claramente sus supuesto y aproximaciones. Para el caso del Sol y la Tierra estime el valor numérico de estos puntos.

**3) Orbita antifaz:** Determine la fuerza central que genera órbitas del tipo "antifaz" como se ilustra en la figura, la cual tiene la forma $r^2 = 2a^2 cos(2\phi)$.

Calcule el caso partícular de la adición de un potencial de la forma $\delta U(r) = \vec{E} \cdot \vec{r}$.

**4-Ley de Snell** Muestre que una partícula de energia E es refractada cuando pasa de una región sin potencial a una región con potencial $-V$ (ver figura). Si el ángulo de incidencia es $\theta_0$ y el ángulo de refracción es $\theta_1$ satisfacen la relacion (Ley de Snell)

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1} = n,$$

donde los ángulos son medidos con respecto a la normal y $n = \sqrt{1 + V/E}$ es el indice de refracción.

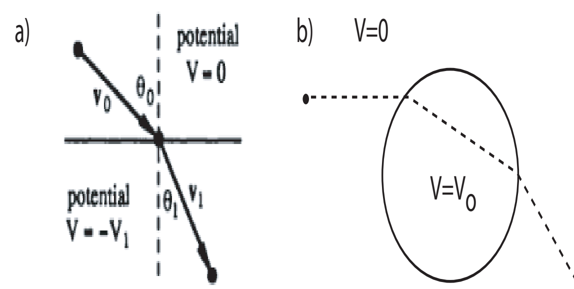
**2-2** Use la ley de Snell anterior para mostrar que una partícula que incide con un parametro de impacto $b$ sobre un potencial cuadrado

$$V(r) = \begin{cases} -V_o & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

es escateriada en un ángulo $\vartheta$ que satisface la relación

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2 \sin^2 \vartheta/2}{n^2 + 1 - 2n\cos\vartheta/2}$$

**2-3** encuentre la sección diferencial de scattering.



# Tarea VIII
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Tarea propuesta por Prof. C. Falcón

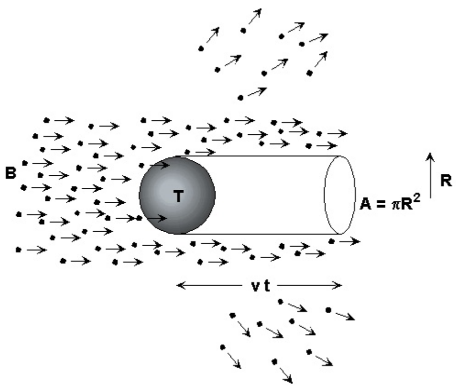



FIG. 1. Scattering de potenciales centrales.

**1.- Scattering de potenciales centrales:** Calcule la sección eficaz de scattering diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ y total $\sigma$ de una partícula en un potencial central $U(r) = \alpha/r^n$.

**2.- Sistemas de referencia:** Calcule la transformación que cambia de las velocidades, el ángulo de scattering y las secciones eficaces diferenciales del choque elástico entre dos partículas desde el sistema de referencia de laboratorio al del centro de masa. Qué pasa si el scattering fuera en $d$ dimensiones?. Asuma que ninguna de las velocidades de las partículas es nula.

**3.- Perturbación de la sección eficaz:** Calcule la corrección a la sección eficaz diferencial de scattering en el sistema de referencia del centro de masa cuando al potencial kepleriano (o coulombiano) se le perturba con un potencial $\delta U(r)$. Justifique sus hipótesis para su cálculo.

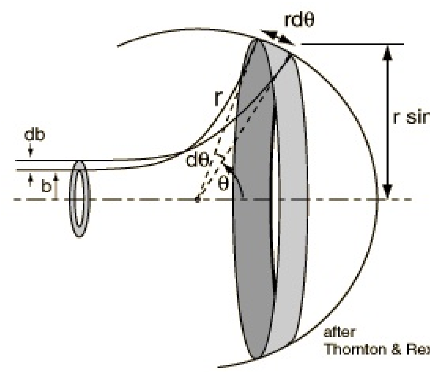



FIG. 2. Scattering de potenciales centrales.

Calcule el caso partícular de la adición de un potencial de la forma $\delta U(r) = \vec{E} \cdot \vec{r}$.

**4.- Campos magnéticos:** Calcule la sección eficaz de scattering en el caso de una partícula cargada que siente un campo magnético $\vec{B_o}$ solo en una esfera de radio $a$

# Tarea VII
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar:

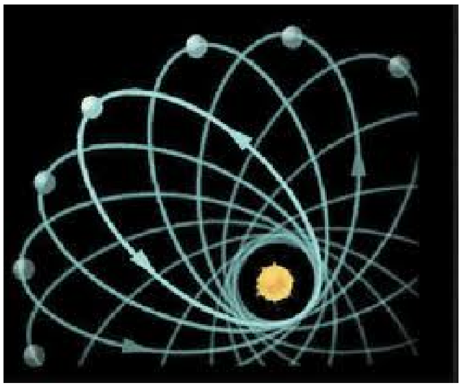


FIG. 1. Órbita de Mercurio.

**1- Precesión de Mercurio:** Uno de los hechos experimentales que contradicen la teoría de la gravedad Universal de Newton es la precesión de la órbita de Mercurio. Su órbita no es una elipse propiamente tal, sino una curva que precesa con respecto a un eje. Para dar cuenta de esta órbita, uno puede plantear perturbar el potencial de Kepler con un término extra de la forma

$$u_{extra}(x) = \frac{\beta}{r^3}$$

Con este potencia modificadol, calcule explicitaménte la órbita de Mercurio y la precesión de la velocidad angular (puede usar las aproximaciones que estime conveniente, siempre y cuando estén claramente justificadas). Investigue los valores de la precesión de la órbita y de la velocidad angular, en función del valor de $\beta$. Es importante notar que esta correción la entrega naturalmente la teoría de la relatividad de Einstein.

**2-Vector de Laplace-Runge-lenz:** Para el problema de Kepler–interaccion de dos cuerpos celeste–uno encuentra que el vector (laplace-runge-lenz)

$$A = \dot{r} \times L - GM\hat{r},$$

donde $r$ es el vector posición, $L$ es el momento ángular, $G$ constante de gravitacion, M la masa y $\hat{r}$ vector unitarion el la dirección del vector posición.

**2-a** Muestre que este vector es constante.

**2-b** Encuentre una transformacion de simetria que permita obtener esta cantidad conservada.

**2-c** en el caso que la fuerza no sea proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, muestre que este vector no es conservado.

**3-Forzamiento:** Una partícula de masa m unidimensional sometida a un potencial externo $h(t)$ esta descrita por el lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + xh(t),$$

**3-a** Encuentre una transformacion no trivial que deja invariante este lagranjeano en el sentido de Noether

**3-b** Calcule e interprete las cantidades conservadas.

**4) Problema de tres cuerpos restringido estático:** Considere una partícula bajo la influencia de un potencial

$$U = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\beta}{r_2},$$

donde $r_1 = \sqrt{(z-b)^2 + \rho^2}$, $r_2 = \sqrt{(z+a)^2 + \rho^2}$, $\{\rho, \varphi, z\}$ son las coordenadas cilíndricas, y $\{\alpha, \beta\}$ caracterizan la interacción.

Por medio del uso de coordenadas elípticas, encuentre el lagrangeano que caracteriza este sistema y determine las cantidades conservada. Muestre si es o no este sistema integrable.

# Tarea VI
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar:

FIG. 1. Eléctromagnetismo.

**1) Partícula súper no Galileano:** Considere una partícula descrita por un lagrangeano

$$L = \alpha \frac{\dot{\vec{v}}^2}{2} + m\frac{\vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}),$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del vector $\vec{r}$ en un sistema de coordenadas inercial. Si esta partícula es descrita en un sistema de coordenadas no inercial el cual es descrito por un vector de traslación $\vec{R}(t)$ y velocidad ángular $\vec{\Omega(t)}$. Encuentre el lagrangeano y ecuaciones de movimientos que describe esta partícula desde el sistema no inercial. Interprete físicamente los términos de la ecuación de movimiento.

**2) Coordenada Parabólicas:** Defina las coordenadas Parabólicas en el plano y cilíndrica. Calcule:
**2a)** La métrica.
**2b)**Encuentre los símbolos de Cristoffel.

**3) Electromagnetismo:** las ecuaciones que describen los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ son las ecuaciones de Maxwell. Muestre que las ecuaciones de Maxwell derivan de un principio de mínima acción. Encuentre la acción y caracterize sus cantidades conservadas con sus respectiva symetria.

**4)Ecuaciones de Newton:** Calcule los símboles de Cristofell y escriba las ecuaciones de Newton en las siguientes coordenadas:
4-a Cilíndricas.
4-b Esféricas.

# Tarea V
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar:

**1) Péndulo de Andronov:** Considere un aro de radio $R$ el cual puede girar con respecto al pivote vertical en el punto $A$ (ver Figura). El aro no tiene momento de inercia con respecto al eje vertical ($I = 0$). Sobre el aro hay un anillo de masa $m$, el cual puede deslizarse sin roce sobre el aro (ver figura).

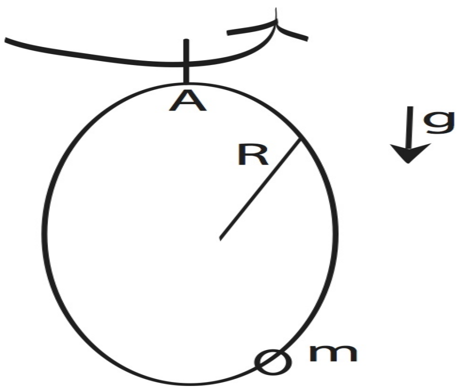



FIG. 1. Péndulo de Andronov

**1-a** Encuentre las ecuaciones de movimiento que caracterizan este sistema.
**1-b** Para los distintos valores del momento angular, encuentre los equilibrios relativos y explique como aparecen y desaparecen.
**1-c** Estudie la estabilidad de estros equilibrios relativos.
**1-d** En caso que el aro este lubricado, que pasa con la estabilidad de los puntos de equilibrio. Dibuje el espacio de fase.

**2)Péndulo doble esférico:** Considere un sistema formado por dos péndulos esféricos ideales de largo y masa $\{l_1, l_2\}$ y $\{m_1, m_2\}$, respectivamente. El péndulo superior tiene fijo su extremo superior a pivote y el otro esta conectado al otro péndulo (ver figura).
**2-a** Calcule la acción de este sistema.
**2-b** Varie la acción y encuentre la ecuación de movimiento de este sistema y caracterice las cantidades conservadas.

**3-Forzamiento:** Una partícula de masa $m$ unidimensional sometida a un potencial externo $h(t)$ esta descrita por el Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + xh(t),$$

**3-a** Encuentre una transformación no trivial que deja invariante este Lagrangeano en el sentido de Noether
**3-b** Calcule e interprete las cantidades conservadas.

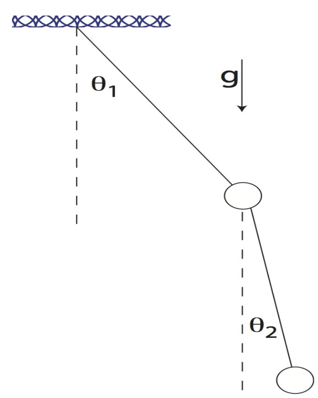



FIG. 2. Péndulo esférico doble

# Tarea IV
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar:

**1- Ecuación de Newton covariante**: La física debe ser independiente del sistema de coordenadas considerado para describir un sistema fśido dado. Considere el siguiente langrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U(q^i),$$

donde $g^{ij}$ es la métrica, la cual es determinada por el sistema de coordenadas considerado.

**1-a)** Muestre que las ecuaciones de movimiento toma la forma (Ecuación de Newton covariante)

$$g_{ij}\left(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{q}^l\dot{q}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial q^i},$$

donde los coeficientes $\Gamma^j_{lm}$ son los simbolos de Christoffel, definidos por

$$\Gamma^j_{lm} \equiv \frac{1}{2}g^{jk}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k}\right)$$

**1-b)** Considere el siguiente lagrangeano

$$L\{q^i, \dot{q}^i\} = \sqrt{g^{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j} - U(q^i),$$

calcule lasecuaciones de movimiento y comparalas con aquellas obtenidas en (1-a), comente claramente sus observaciones.

**2-Sistemas disipativos**: Para dar cuenta de la dinámica de un cometa en el espacio inter estelar bajo la influencia de polvo intergaláctico se puede modelar como una partícula de masa $m$, bajo la influencia de un potencial externo $U(\vec{r})$ y una fuerza de fricción humeda caracterizada por un coeficiente de fricción o amortiguamiento $\alpha$, es decir, este cometa esta descrito por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\nabla}U(\vec{r}),$$

donde $\vec{\nabla}$ es el gradiente.

**2-a)** Encuentre la acción que describe este sistema.

**2-b)** En el caso que el potencial es el gravitacional, que ocurrira con las orbitas parabólicas tipicamente exhibida por los cometas.

**3-Fuerza de Lorentz:** considere una carga eléctrica $q$ bajo la influencia de un potencial exterior $U(\vec{r})$ y un campo magnetico exterior constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$ ($\hat{z}$ es un vector unitario fijo), el cual satisface la ecuación de movimiento (Fuerza de lorentz)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla U + \frac{q}{c}\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

donde $c$ es la velocidad de la luz.

Encuentre la acción que describe este sistema.

**4- Partícula relativista**: Considere una partícula que se mueve a gran velocidad—partícula relativista—la cual es descrita por el siguiente lagrangeano

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = -mc\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3}\dot{x}^i\dot{x}^i} - U(x),$$

donde $c$ es la velocidad de la luz.

**1-a** Encuentre las ecuaciones de movimiento que describen a este sistema e interprete.

**1-b** Que forma tendría el lagrangeano si la velocidad es pequeña comparada con la de la luz.

# Tarea III
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar:

**1-Péndulo de Andronov Modificado:** Un alambre con forma parabólica caracterizado por una concavidad $\alpha$, gira con respecto a la vertical con una velocidad angular contante $\omega$. Sobre el alambre se desliza un péndulo ideal de largo $l$ y masa $m$ sin fricción (ver figura).

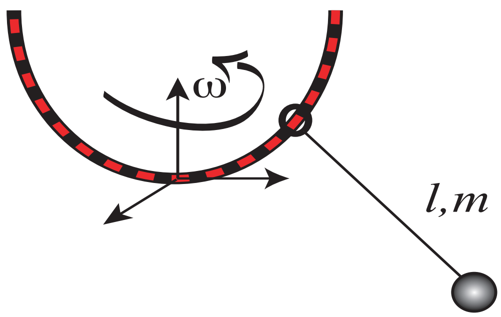
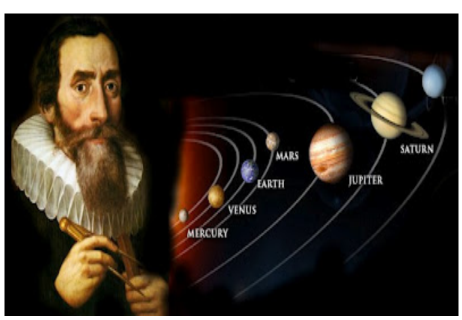



FIG. 1. Péndulo de Andronov modificado.

**1-a** Encuentre la acción que caracteriza el movimiento de la masa $m$.
**1-b** Cacule las ecuaciones de movimiento que describe este sistema.
**1-a** Encuentre las cantidades conservadas que describen este sistemas y a que simetría estan relacionadas.

**2) Problema de Kepler:** Considere el problema de interacción gravitacional de dos cuerpos.




**2-a** Encuentre el lagrangeano y la acción de este sistema.
**2-b** Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

**3) Trompo con pua Fija:** Considere un trompo simétrico de masa $M$, momentos de inercia $I_1 = I_2 = I$, $I_3$ con respecto a sus ejes principales. El centro de masa


se ubica a una distancia $l$ de la púa (ver figura). En el Caso que la púa este fija

Recomendación: usar ángulos de Euler como variables.

**3-a** ¿Cuál es la velocidad angular del trompo?

**3-b** ¿Cuál es la acción que describe a este sistema?

**3-c** Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales estan relacionadas estas cantidades conservadas.

**4) Ecuaciones de Euler-Lagrange generalizada:** Considere un sistema el cual tiene m grados de libertad. El Lagrangeano que caracteriza este sistema depende explicitamente de los grados de libertad y sus primeras n-derivadas temporales, es decir,

$$\mathrm{L}(\vec{q}, \vec{q}^{(1)}, \ldots, \vec{q}^{(n)}; t, \{\lambda\}),$$

donde $q^{(l)} = \frac{d^l \vec{q}(t)}{dt^l}$, $\{\lambda\}$ es un conjunto de parámetros.

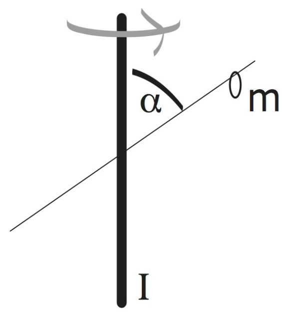
**4-a** ¿Cuál es la ecuación de movimiento que uno obtiene si uno minimiza la acción generada por el lagrangeano anterior ?

**4-b** ¿Si el lagrangeano no depende explicitamente del tiempo. Hay una cantidad conservada? y que forma tiene.

# Tarea II
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar:

**1) Vara Mágica:** Considere un sistema compuesto por una barra vertical, caracterizada por un momento de inercia $I$ con respecto al eje vertical. Esta puede girar libremente en la dirección vertical (ver figura 1). Sobre esta barra es soldado una nueva vara sin masa ni tensor de inercias (despreciables), la cual forma un ángulo $\alpha$ con la barra vertical (ver figura 1). Considere un anillo de masa $m$ que puede deslizar sobre la vara oblicua bién pulida, el cual describirá en general una trayectoria sobre el cono generado por la vara.




**1-a** Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del anillo.

**1-b** Encuentre (gráficamente) los puntos de equilibrio del sistema (equilibrios relativos), estudie la estabilidad de éstos.

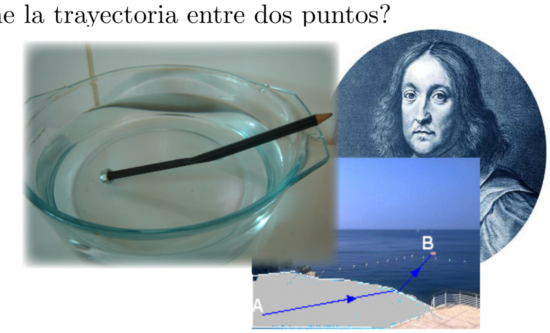
**1-c** En el caso que la condición inicial engendre un pequeño momento angular en la dirección vertical, describa cualitativamente cual es el movimiento del anillo. Y en el caso que engendre una gran momento angular que prodría ocurrir con el anillo?.

**2) Principio de Fermat** La óptica geométrica es descrita por el siguiente principio: ”El tiempo transcurrido por el pasaje de la luz entre dos puntos fijos es el mínimo de todas las trayectorias o caminos entre estos puntos” (PRINCIPIO DE FERMAT). Si $v(x, y)$ es la velocidad de la luz en un punto del espacio (por simplicidad considere el plano $\{x, y\}$).

**2-a** Escriba un principio variacional que de cuenta del principio de Fermat.

**2-b** Minimize el principio variacional y encuentre la ecuación para el rayo de luz en un medio cualquiera. Interprete fisicamente esta ecuación (Recomendacion: a partir del principio de Fermat deduzca la ley de Snell, usando esta ley trate de interpretar su resultado).

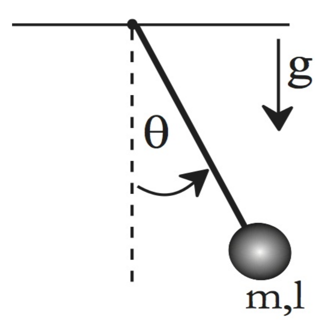
**2-c** Considere el caso que la velocidad del medio solo depende de la dirección vertical $v(y) = cy$. ¿que forma tiene la trayectoria entre dos puntos?




**3) Sistema disipativo:** Considere un péndulo plano el cual esta compuesto por una ésfera y cuerda ideal de masa $m$ y largo $l$. Como consecuencia de la presencia del aire este ejerce una fuerza proporcional a la velocidad caracterizada por un coeficiente de amortiguamiento $\nu$, es decir, la ecuación de movimiento del péndulo toma la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta) - \nu\dot{\theta}$$

**3-a** Encuentre la acción que caracteriza a este sistema.



# Tarea I
# Mecánica clásica (2012)

Profesor: Marcel G. Clerc
Auxiliar:

**1) Oscilador nolinear:** Considere un oscilador (ver figura), el cual para pequeñas deformaciones en la dirección horizontal satisface la ecuación

$$\ddot{x} = -\omega^2 + \alpha x^3,$$

donde $\alpha$ da cuenta de la respuesta no lineal.

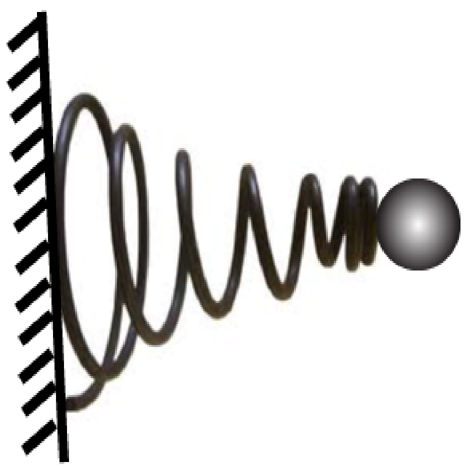


FIG. 1. Resorte no lineal

**1-a** Encuente analíticamente las solución de este problema.

**1-b** Caracterice geométricamente el espacio de fase.

**2) Resorte de trosión** En la figura 2 se ilustra un resorte de torsión

FIG. 2. Resorte de torsión

Encuentre la ecuación que caracteriza este resorte y caracterice su espacio de fase.

**3) Dinámica de un boya:** Considere un boya homogenea con forma aproximadamente coníca como se ilustra en la figura flota en el mar.

FIG. 3. Boya

Si el material con que esta hecha la boya es de densidad menor que la del agua del mar y considere que el agua esta quieta, encuentre la ecuacin de movimiento de la boya, caracterice la diá mica de la boya por medio de soluciones analíticas y el uso del espacio de fase.