Teoría Cuántica de Campos FI-7011
Tarea 1: Martes 1 de abril, 2025
Fecha de entrega: Jueves 10 de abril.

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux: Javier Huenupi

P1: Considere una teoría cuántica libre construida a partir del Lagrangiano $\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$.

(a) El Hamiltoniano de la teoría viene dado por $H_0 = \int \tilde{dp} E_p a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$. A partir de las relaciones de conmutación de los operadores escaleras $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}$, determine expresiones simples para las siguientes traslaciones temporales:

$$e^{iH_0t} a_{\mathbf{k}} e^{-iH_0t}, \qquad e^{iH_0t} a^\dagger_{\mathbf{k}} e^{-iH_0t}. \tag{1}$$

(b) Defina el operador momento P de la forma

$$\mathbf{P} = -\int d^3x \pi(x) \nabla\phi(x). \tag{2}$$

Utilice las relaciones de conmutación válidas para ϕ y π para deducir una expresión para $[\mathbf{P}, \phi(x)]$.

(c) Encuentre una expresión para $\mathbf{P}$ en términos de $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}$.

(d) Utilice la expresión encontrada en la sección (c) para determinar el efecto de una traslación espacial sobre los operadores escaleras $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}$. Es decir, determine expresiones para

$$e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}, \qquad e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} a^\dagger_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}. \tag{3}$$

(e) A partir de los resultados de las secciones (a) y (d), compruebe cómo una traslación espacio temporal afecta a un campo $\phi(x)$.

P2: Considere una teoría cuyo Lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{A^2}{2}(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2, \tag{4}$$

donde A es una constante. Cuantice la teoría para encontrar su espectro. ¿Cómo difiere de la teoría usual, donde $A = 1$? ¿Por qué?

P3: Considere la siguiente teoría con dos campos ϕ y ψ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\psi)^2 - \frac{1}{2}m^2\psi^2 - \alpha\dot{\phi}\psi. \tag{5}$$

Note que debido a el término $-\alpha\dot{\phi}\psi$ la teoría no es invariante bajo Lorentz. Aun así, es una teoría libre y su espectro puede ser calculado exactamente.

(a) Deduzca las ecuaciones de movimiento y encuentre soluciones de ondas planas.

(b) Determine los momentos canónicos asociados a ϕ y ψ. Expanda apropiadamente los campos en términos de operadores de creación y destrucción de modo que se cumplan las relaciones de conmutación adecuadas para los campos.

(c) Determine la forma del Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y destrucción.

P4: En las cátedras se vio que la amplitud de transición del proceso $|x_\mathrm{i}\rangle \to |x_\mathrm{f}\rangle$, después de transcurrido un tiempo $T = t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}$, viene dada por la siguiente expresión:

$$\langle x_\mathrm{f}|U(t_\mathrm{f}, t_\mathrm{i})|x_\mathrm{i}\rangle = \mathcal{N} \int\limits_{\substack{x(t_\mathrm{i}) = x_\mathrm{i} \\ x(t_\mathrm{f}) = x_\mathrm{f}}} \mathcal{D}x \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt L\right]. \tag{6}$$

Es posible definir la base de coordenadas en el cuadro de Heisenberg como $|x,t\rangle = U^\dagger(t,t_0)|x\rangle$, donde t_0 es algún tiempo convencional fijo (por ejemplo, puede tomar $t_0 = 0$). Note que se tiene:

$$\langle x', t|x, t\rangle = \langle x'|U(t,t_0)U^\dagger(t,t_0)|x\rangle = \langle x'|x\rangle = \delta(x'-x). \tag{7}$$

(a) Muestre que se cumple:

$$\langle x', t_\mathrm{f}|x, t_\mathrm{i}\rangle = \mathcal{N} \int\limits_{\substack{x(t_\mathrm{i}) = x \\ x(t_\mathrm{f}) = x'}} \mathcal{D}x \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt L\right]. \tag{8}$$

(b) En el cuadro de Heissemberg la evolución temporal de un operador $\hat{A}$ (constante en el cuadro de Schrödinger) viene determinada por la relación $\hat{A}(t) = U^\dagger(t,t_0)\hat{A}U(t,t_0)$. En particular $\hat{x}(t) = U^\dagger(t,t_0)\hat{x}U(t,t_0)$. Muestre que

$$\langle x', t_\mathrm{f}|\mathcal{T}\left[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)\cdots\hat{x}(t_n)\right]|x, t_\mathrm{i}\rangle = \mathcal{N} \int\limits_{\substack{x(t_\mathrm{i}) = x \\ x(t_\mathrm{f}) = x'}} \mathcal{D}x\, x(t_1)x(t_2)\cdots x(t_n) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt L\right], \tag{9}$$

donde los tiempos t_i con $i = 1, \ldots, n$ son tales que $t_\mathrm{f} > t_i > t_\mathrm{i}$.