

# Tarea 1

**Profesor: Simón Riquelme**

Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi

Ayudante: Bruno Pollarolo

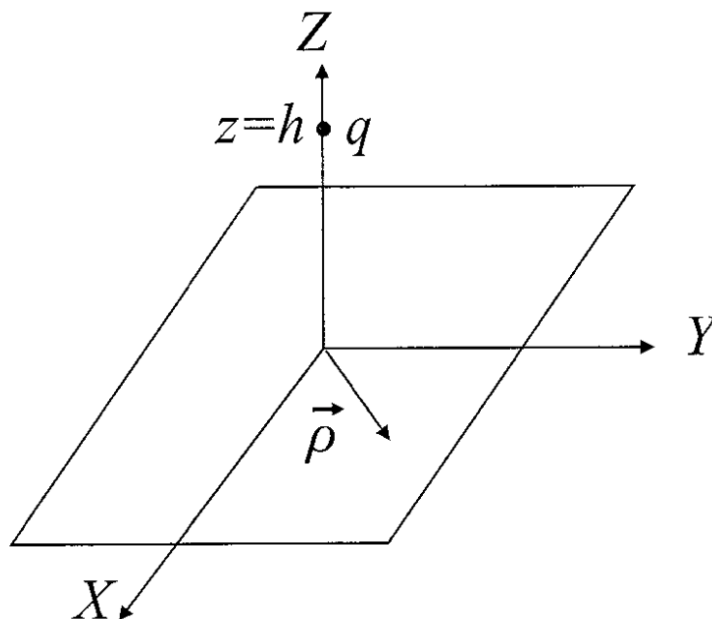
## Pregunta 1

Sobre un plano cargado, ubicado en  $z = 0$ , se deposita una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  sobre el eje  $z$ . El plano tiene una densidad de carga  $\sigma$  con simetría cilíndrica respecto al eje  $z$  dada por

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}},$$

donde  $\rho$  denota la distancia de un punto del plano al eje  $z$ .

- Calcule la fuerza sobre la carga puntual  $q$
- Determine con qué velocidad llegará la partícula al plano si se libera partiendo del reposo a una distancia  $h$  del plano



## Pregunta 2

En un día con buen tiempo, el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra queda descrito adecuadamente por la expresión empírica

$$\vec{E} = -(ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z})\hat{k},$$

donde  $a, b, \alpha > 0$  y  $\beta > 0$  son constantes y  $z$  denota la altura sobre la superficie de la Tierra.

- Utilice la forma diferencial de la Ley de Gauss para determinar la densidad de carga en función de la altura
- Calcule la carga total contenida en una columna vertical de sección transversal  $A$  que va desde  $z = 0$  hasta  $z = \infty$

## Pregunta 3

Una esfera sólida de radio  $R$  tiene una densidad de carga  $\rho(r) = \frac{\alpha}{r}$ , donde  $\alpha$  es una constante desconocida. La esfera está rodeada por un cascarón conductor de radio interior  $r_a$ , radio exterior  $r_b$  y carga total  $Q$ . La diferencia de potencial entre la esfera y el conductor es  $V_0$

- Determine la constante  $\alpha$ .
- Calcular el campo en todo el espacio.
- Calcular el potencial en todo el espacio.
- Calcule las densidades de carga en las superficies  $r = r_a$  y  $r = r_b$ .

# Tarea 1

## P1

a) Para calcular la fuerza, primero necesitamos calcular el campo eléctrico en el eje  $\hat{k}$

$$\triangleright \vec{r} = z\hat{k}$$

$$\triangleright \vec{r}' = \rho'\hat{\rho}'$$

$$\triangleright \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'$$

$$\triangleright |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + \rho'^2)^{1/2}$$

$$\triangleright \sigma(\rho') = -qh / 2\pi(\rho'^2 + h^2)^{3/2}$$

$$\triangleright ds' = \rho' d\phi' d\rho'$$

Por lo que el campo sería

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{-qh}{2\pi(\rho'^2 + h^2)^{3/2}} \frac{z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi'$$

$$= \frac{-qh}{8\pi^2\epsilon_0} \left[ z\hat{k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2} (z^2 + \rho'^2)^{3/2}} - \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho'^2 (\cos\phi' \hat{i} + \sin\phi' \hat{j})}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2} (z^2 + \rho'^2)^{3/2}} d\rho' d\phi' \right]$$

por integral en  $\phi'$

$$= \frac{-qh z \hat{k}}{8\pi^2\epsilon_0} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2} (z^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-qh z \hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{h z (z+h)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z+h)^2} \hat{k}$$

Como la partícula está en  $z=h$ , la fuerza sería

$$\vec{F} = q \vec{E}(h\hat{k}) = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{h^2} \hat{k}$$

b) La fuerza sobre la carga  $\forall z$  es  $\vec{F}(z\hat{k}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(z+h)^2} \hat{k}$ , por lo que la ec. de mov. es

$$m \ddot{z} \hat{k} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(z+h)^2} \hat{k}$$

$$\Rightarrow m \int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \dot{z} d\dot{z} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_0}^z \frac{dz}{(z+h)^2}$$

truco de mecánica

donde las condiciones iniciales son  $\dot{z}(t=0) = 0$  y  $z(t=0) = h$ .

$$\Leftrightarrow m \frac{\dot{z}^2}{2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{z+h} \right) \Big|_h^z$$

$$\Leftrightarrow m \frac{\dot{z}^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{z+h} - \frac{1}{2h} \right)$$

y nos interesa la velocidad en  $z=0 \Rightarrow \dot{z}(z=0) = \sqrt{\frac{q^2}{2m\pi\epsilon_0} \frac{1}{2h}}$

# P2

a) La Ley de Gauss en su forma diferencial es  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ , por lo que debemos calcular la divergencia en coordenadas cartesianas

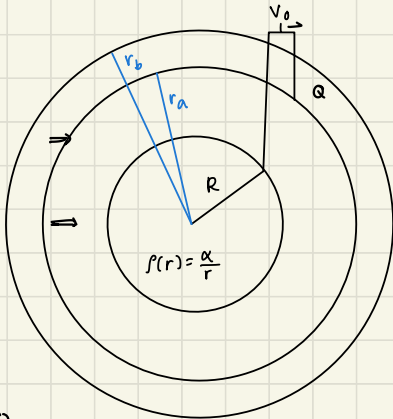
$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (ae^{-\alpha x} + be^{-\beta x}) = a\alpha e^{-\alpha x} + b\beta e^{-\beta x}$$

$$\Rightarrow \rho(x) = a\alpha\epsilon_0 e^{-\alpha x} + b\beta\epsilon_0 e^{-\beta x}$$

b) Para la carga total ocupamos  $Q = \int \rho(r) d\tau$ . Consideremos un paralelepípedo donde  $A = \int dx dy$  y  $z \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= \int_0^{\infty} \int_A (a\alpha\epsilon_0 e^{-\alpha z'} + b\beta\epsilon_0 e^{-\beta z'}) dx' dy' dz' = A \left[ a\alpha\epsilon_0 \int_0^{\infty} e^{-\alpha z'} dz' + b\beta\epsilon_0 \int_0^{\infty} e^{-\beta z'} dz' \right] \\ &= A \left[ -a\epsilon_0 e^{-\alpha z'} \Big|_0^{\infty} - b\epsilon_0 e^{-\beta z'} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= A(a\epsilon_0 + b\epsilon_0) \end{aligned}$$

# Pauta P3 tarea 1



→ Dentro del conductor,  
 $\vec{E} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$

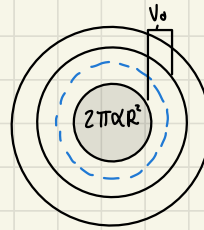
· En esféricas  $dv = r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$

Q

$$\begin{aligned} \rightarrow q_{\text{esf.}} &= \int dq = \int \rho(r) dv = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\alpha}{r} \cdot r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \\ &= 2\pi\alpha \int_0^\pi \int_0^R r \sin\theta dr d\theta = 2\pi\alpha \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi = \pi\alpha R^2 [1+1] \\ &= \boxed{2\pi\alpha R^2} \end{aligned}$$

Aplicando ley de Gauss.

$$\begin{aligned} \int \vec{E}(R < r < r_a) \cdot d\vec{s} &= \frac{2\pi\alpha R^2}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E}(R < r < r_a) \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin\theta d\phi d\theta}_{4\pi r^2} &= \frac{2\pi\alpha R^2}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E}(R < r < r_a) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{2\pi\alpha R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(R < r < r_a) = \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r^2}} \end{aligned}$$



como  $\vec{V}(r) = - \int_{r_0}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$

$$\underbrace{\vec{V}(r_a) - \vec{V}(R)}_{V_0} = - \int_{r_0}^{r_a} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} + \int_{r_0}^R \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$V_0 = \int_{r_a}^R \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^R \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0} \int_{r_a}^R \frac{1}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_a}^R = -\frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 R} + \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r_a}$$

$$\Rightarrow V_0 = \alpha \left( \frac{R^2}{2\epsilon_0 r_a} - \frac{R}{2\epsilon_0} \right) = \alpha \left( \frac{R^2 - R r_a}{2\epsilon_0 r_a} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_0 \cdot 2\epsilon_0 r_a}{R^2 - R r_a} = \alpha}$$

6)

Aplicando ley de Gauss:

· Encerrando por fuera del cilindro:

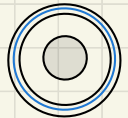
$$\int \vec{E}(r > r_b) \cdot d\vec{s} = \frac{Q + 2\pi\alpha R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r > r_b) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{Q + 2\pi\alpha R^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r > r_b) = \frac{Q + 2\pi\alpha R^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}} \quad \Rightarrow \vec{E}(r > r_0) = \frac{Q + 2\pi \left( \frac{V_0 \cdot 2\epsilon_0 r_a}{R^2 - R r_a} \right) R^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$



· Dentro del cascarón:

$$\boxed{\vec{E}(r_a < r < r_b) = 0} \rightarrow \text{debido a que el cascarón esférico es un conductor.}$$



Entre la esfera y el cascarón:

$$\vec{E}(R < r < r_a) = \frac{\alpha R^2 \hat{r}}{2\epsilon_0 r^2}$$

→ Calculado anteriormente.



$$\Rightarrow \vec{E}(R < r < r_a) = \frac{(V_0 \cdot 2\epsilon_0 \Gamma a)}{R^2 - R a} R^2 \hat{r}$$

Dentro de la esfera:

$$\int \vec{E}(r < R) \cdot d\vec{s} = \pi \alpha r^2 \Rightarrow E(r < R) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi \alpha r^2 \cdot 2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r < R) = \frac{\alpha \hat{r}}{2\epsilon_0}$$



$$\Rightarrow \vec{E}(r < R) = \frac{V_0 \cdot 2\epsilon_0 \Gamma a}{(R^2 - R a) 2\epsilon_0} \hat{r} = \frac{V_0 \Gamma a}{(R^2 - R a)} \hat{r}$$

©) Fuera del cilindro:

$$V(r > r_b) = - \int_{r_0}^r \vec{E}(r > r_0) \cdot d\vec{r} = - \int_{r_0}^r \frac{Q + 2\pi \alpha R^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr$$

$$V(r > r_b) = - \frac{Q + 2\pi \alpha R^2}{4\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_0}^r = \frac{Q + 2\pi \alpha R^2}{4\pi \epsilon_0 r} - \frac{Q + 2\pi \alpha R^2}{4\pi \epsilon_0 r_0}$$

$V(r_0) = 0$

$$\Rightarrow V(r > r_0) = \frac{Q + 2\pi \alpha R^2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

En el conductor

$$V(r_a < r < r_b) = \frac{Q + 2\pi \alpha R^2}{4\pi \epsilon_0 r_b}$$

$$\Rightarrow V(r_a < r < r_b) = \frac{Q + 2\pi \alpha R^2}{4\pi \epsilon_0 r_b}$$

→ Es cte ya que es un conductor. V se mantiene desde  $r = r_b$ .

Entre la esfera y el conductor

$$V(R < r < r_a) = - \int_{r_a}^r \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r^2} dr + \frac{2\pi \alpha R^2 + Q}{4\pi \epsilon_0 r_b} = - \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_a}^r + \frac{2\pi \alpha R^2 + Q}{4\pi \epsilon_0 r_b}$$

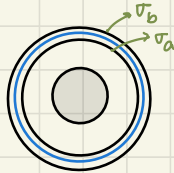
$$\Rightarrow V(R < r < r_a) = \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right) + \frac{2\pi \alpha R^2 + Q}{4\pi \epsilon_0 r_b}$$

## Dentro de la esfera

$$\begin{aligned}
 V(r < R) &= - \int_r^R \frac{\alpha}{2\epsilon_0} dr + \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_a} \right) + \frac{2\pi\alpha R^2 + Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \\
 &= - \frac{\alpha}{2\epsilon_0} [r]_r^R + \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_a} \right) + \frac{2\pi\alpha R^2 + Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \\
 &= \frac{\alpha}{2\epsilon_0} (R - r) + \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_a} \right) + \frac{2\pi\alpha R^2 + Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r < R) = \frac{\alpha R}{\epsilon_0} - \frac{\alpha r}{2\epsilon_0} - \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r_a} + \frac{2\pi\alpha R^2 + Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}}$$

(d) para  $r = r_a$  :



→ En el conductor, la carga se distribuye en la superficie.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\int \sigma_a ds + Q_{cfs}}{\epsilon_0}$$

$$0 = \frac{\sigma_a \cdot 4\pi r_a^2 + 2\pi\alpha R^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{-\alpha R^2}{2r_a^2} = \sigma_a} \Rightarrow \sigma_a = - \frac{V_0 \cdot 2\epsilon_0 r_a}{R^2 - R r_a} \cdot \frac{R^2}{2r_a^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_a = \frac{V_0 \cdot \epsilon_0 \cdot R}{(r_a - R) r_a}}$$

$$\Rightarrow \int \sigma_b ds + \int \sigma_a ds = Q$$

$$\Rightarrow \sigma_b 4\pi r_b^2 + \frac{V_0 \epsilon_0 \cdot R}{(r_a - R) r_a} \cdot 4\pi r_a^2 = Q$$

$$\Rightarrow \sigma_b 4\pi r_b^2 = \frac{Q}{4\pi r_b^2} - \frac{V_0 \epsilon_0 R r_a \cdot 4\pi}{(r_a - R) r_b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_b = \frac{Q}{4\pi r_b^2} - \frac{V_0 \epsilon_0 R \cdot r_a}{(r_a - R) r_b^2}}$$