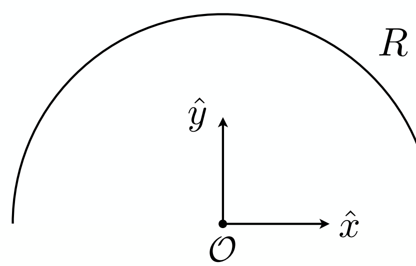
Mecánica FI2001-4
Ejercicio 9: Jueves 26 de junio, 2025

Prof. Gonzalo A. Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi y Danilo Tapia

Considere un alambre homogéneo de masa M con forma de semi-círculo de radio R. Calcule su matriz de inercia con respecto al punto $\mathcal{O}$ que representa el centro del círculo al cual el alambre está circunscrito, en un sistema de referencia orientado tal como muestra la figura.



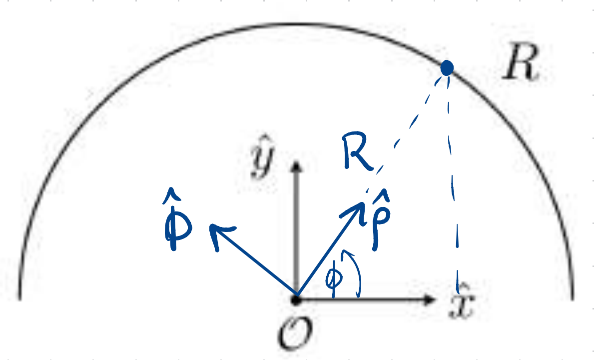
Recuerde que la matriz de inercia con respecto al punto $\mathcal{O}$ tiene la forma:

$$I_{\mathcal{O}} = \int dm \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde x, y y z son las posiciones de los puntos que conforman al sólido. Además, recuerde que en el caso de alambres, $dm = \lambda d\ell$, donde λ es la densidad de masa lineal, y $d\ell$ es la unidad de elemento infinitesimal de alambre.

Ejercicio 9

P1



Usando las coordenadas cilíndricas

$$x = R\cos\phi, \quad y = R\sin\phi, \quad z = 0$$

El diferencial de masa es

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{\pi R} R d\phi = \frac{M}{\pi} d\phi, \quad \phi \in [0, \pi]$$

Calculemos con $I_0^{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm$

- $I_0^{11} = \int (y^2 + z^2) dm = \frac{MR^2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\phi \, d\phi = \frac{MR^2}{2}$
- $I_0^{22} = \int x^2 dm = \frac{MR^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2\phi \, d\phi = \frac{MR^2}{2}$
- $I_0^{33} = \frac{MR^2}{\pi} \int_0^{\pi} d\phi = MR^2$

Es fácil ver que el resto de elementos son 0

- $I_0^{12} = I_0^{21} = -\frac{MR^2}{\pi} \underbrace{\cancel{\int_0^{\pi} \cos\phi \sin\phi \, d\phi}}_{=0} = 0$
- $I_0^{13} = I_0^{31} = -\int x \underbrace{\cancel{z}}_{=0} dm = 0$
- $I_0^{23} = I_0^{32} = -\int y \underbrace{\cancel{z}}_{=0} dm = 0$