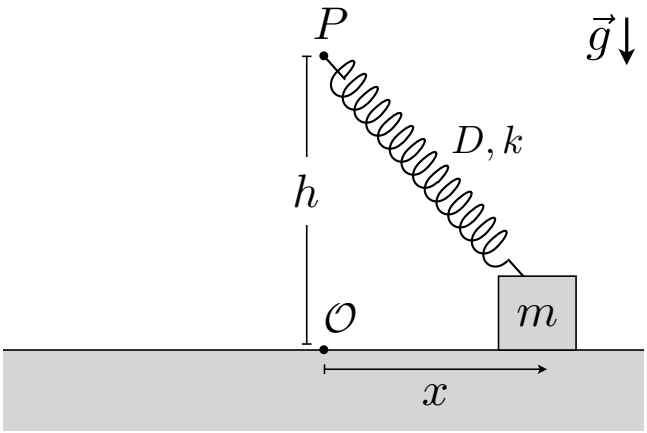
Mecánica FI2001-4
Ejercicio 5: Jueves 8 de mayo, 2025

Prof. Gonzalo A. Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi y Danilo Tapia

Considere una bloque de masa m que puede deslizar sobre el suelo sin roce. El bloque permanece unido mediante un resorte de largo natural D y constante elástica k a un punto fijo P, ubicado sobre el origen $\mathcal{O}$ a una altura $h < D$.

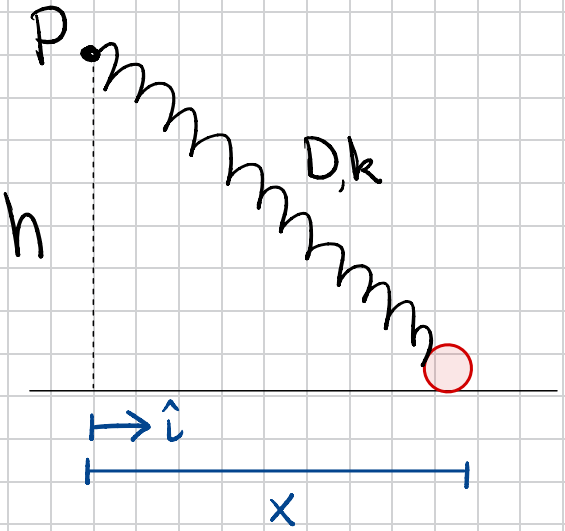


(a) Identifique todas las configuraciones de equilibrio indicando si estas son estables o inestables.

(b) Para una de las posiciones de equilibrio estable, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

Ejercicio 5

P1



Por pitágoras, la energía potencial sería

$$U(x) = \frac{1}{2}k(r-D)^2 + 0 \quad \leftarrow \text{gravitatoria}$$
$$= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+h^2} - D\right)^2$$

y calculamos los ptos. de equilibrio

$$\left.\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right|_e = k\left(\sqrt{x_e^2+h^2} - D\right)\frac{x_e}{\sqrt{x_e^2+h^2}} \overset{!}{=} 0$$

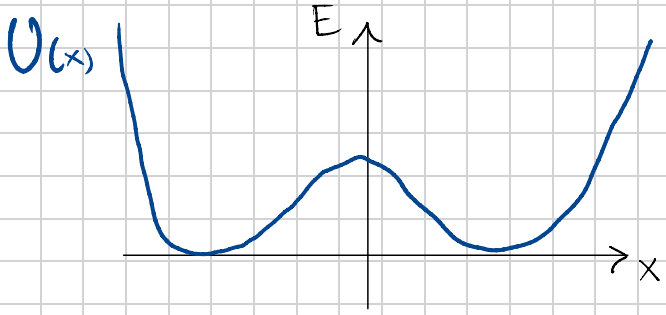
entonces $x_{e,1} = 0$, $x_{e,2} = +\sqrt{D^2-h^2}$, $x_{e,3} = -\sqrt{D^2-h^2}$

Analizamos su estabilidad

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = k\frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{xD}{\sqrt{x^2+h^2}}\right) = k\left(1 - \frac{D}{\sqrt{x^2+h^2}} + \frac{x^2 D}{(x^2+h^2)^{3/2}}\right)$$

entonces

- $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_{e,1}} = k\left(1 - \frac{D}{h}\right) < 0 \Rightarrow$ inestable
- $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_{e,2}} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_{e,3}} = k\left(1 - \frac{D}{D} + \frac{(D^2-h^2)D}{D^3}\right) = k\left(1 - \frac{h^2}{D^2}\right) > 0 \Rightarrow$ estables

Para $x_{e,2}$ y $x_{e,3}$ la frecuencia es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_e)}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{h^2}{D^2}\right)}$$