

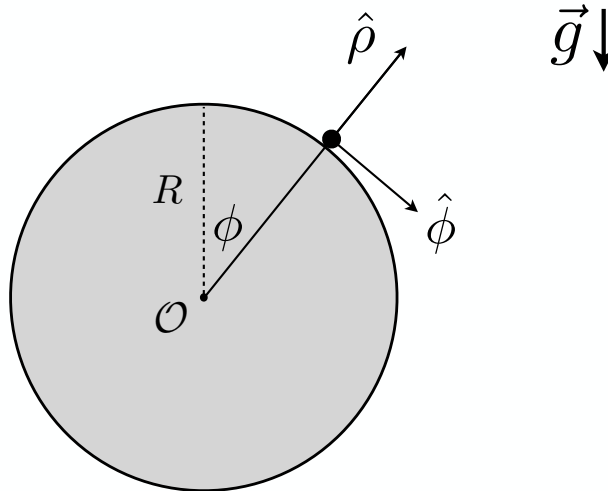
Mecánica FI2001-4
Ejercicio 3: Jueves 3 de abril, 2025

Prof. Gonzalo A. Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi y Danilo Tapia

Una masa puntual de masa m puede deslizar, sin roce, sobre la superficie de un cilindro horizontal, de radio R , tal como muestra la figura.

(a) 4.0 pts. A partir de la segunda ley de Newton, identifique la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ y la ecuación algebraica para la normal N que la superficie ejerce sobre la partícula.

(b) 2.0 pt. Encuentre $\dot{\phi}$ en función de ϕ (esto es, integre una vez la ecuación de movimiento). Asuma que la partícula comienza desde el reposo en la posición $\phi = 0$.



Recordatorio: Recuerde que (omitiendo z) la aceleración en coordenadas cilíndricas viene dada por

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\ddot{\phi}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}. \quad (1)$$

Ayuda: Note que, en términos de la base cilíndrica, la fuerza de gravedad apunta en la dirección:

$$\hat{g} = -\hat{\rho} \cos \phi + \hat{\phi} \sin \phi. \quad (2)$$

Ejercicio 3

a) La partícula se mueve sin despegarse sobre el manto del cilindro (y solo angularmente, no se mueve a lo largo del cilindro) de radio R , por lo tanto

$$\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

Solamente hay dos fuerzas actuando sobre la partícula:

► Normal: $\vec{N} = N \hat{r}$, con $N = |\vec{N}| > 0$

► Peso: $m\vec{g} = -mg \cos \phi \hat{r} + mg \sin \phi \hat{\phi}$

mientras que su aceleración sería:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{r} + (2\cancel{\dot{\rho}}\dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\phi} \\ &= -R\dot{\phi}^2 \hat{r} + R\ddot{\phi} \hat{\phi}\end{aligned}$$

Por lo tanto, por segunda ley de Newton

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow -mR\dot{\phi}^2 \hat{r} + mR\ddot{\phi} \hat{\phi} = N \hat{r} - mg \cos \phi \hat{r} + mg \sin \phi \hat{\phi}$$

y los EoM escalares serían

$$\hat{r}) \quad -mR\dot{\phi}^2 = N - mg \cos \phi$$

$$\hat{\phi}) \quad mR\ddot{\phi} = mg \sin \phi$$

b) De la EoM de $\hat{\phi})$ integramos con truco de mecánica

$$R \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = g \sin \phi \quad / \int_0^{\dot{\phi}} d\phi$$

$$\Rightarrow R \int_0^{\dot{\phi}(\phi)} \dot{\phi} d\dot{\phi} = g \int_0^{\phi} \sin \phi d\phi$$

$$\Leftrightarrow R \frac{\dot{\phi}^2(\phi)}{2} = -g (\cos(\phi) - 1)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(\phi) = + \sqrt{\frac{2g}{R} (1 - \cos(\phi))}$$