

Ejercicio 2

Velocidad angular

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

Pregunta.-

Considere una partícula moviéndose con rapidez constante $\vec{v}$ a lo largo de un círculo horizontal de radio R , centrado en el eje z , y a una altura constante h . Calcule la velocidad angular $\vec{\omega}$ con respecto al origen. Expresé el resultado utilizando la base unitaria de las coordenadas cilíndricas.

Recordatorio 1: La velocidad angular viene dada por

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{\|\vec{r}\|^2}. \quad (1)$$

Recordatorio 2: Recuerde que la posición y velocidad en coordenadas cilíndricas vienen dadas por

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k} \quad \vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{k}.$$

Ayuda: Note que en coordenadas cilíndricas la partícula satisface $\|\vec{r}\| \equiv r = \sqrt{R^2 + h^2}$, $z = h$, y $\phi = (v/R)t$.

Respuesta.-

Lo primero que tenemos que hacer es simplificar las expresiones de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ para luego reemplazarlas en (1). Sabemos que

$$\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0, \quad z = h \Rightarrow \dot{z} = 0, \quad \phi = (v/R)t \Rightarrow \dot{\phi} = v/R,$$

por lo que reemplazando en la posición

$$\vec{r} = R \hat{\rho} + h \hat{k} \quad (2)$$

y en la velocidad

$$\vec{v} = v \hat{\phi}. \quad (3)$$

Haciendo el producto cruz entre (2) y (3),

$$\vec{r} \times \vec{v} = (R \hat{\rho} + h \hat{k}) \times v \hat{\phi},$$

ocupando que $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{k}$, $\hat{\phi} \times \hat{k} = \hat{\rho}$, obtenemos

$$\vec{r} \times \vec{v} = Rv\hat{k} - hv\hat{\rho}. \quad (4)$$

Mientras que el denominador de (1) es la constante que nos dan en la *Ayuda* (es una hipotenusa constante)

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{R^2 + h^2}. \quad (5)$$

Finalmente, reemplazando (4) y (5) en la expresión de $\vec{\omega}$ tenemos

$$\vec{\omega} = \frac{Rv\hat{k} - hv\hat{\rho}}{R^2 + h^2}.$$