

Auxiliar 9

Grupo de renormalización

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliar: Javier Huenupí

P1.-

Considere la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\varphi\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}Z_m m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}Z_\chi\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}Z_M M^2\chi^2 \\ + \frac{1}{3!}Z_g g\tilde{\mu}^{\epsilon/2}\varphi^3 + \frac{1}{2!}Z_h h\tilde{\mu}^{\epsilon/2}\varphi\chi^2 + Y\varphi,$$

en $d = 6 - \epsilon$ dimensiones, donde φ y χ son campos escalares reales, y Y se ajusta para cumplir $\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0$.

- ¿Por qué no se necesita un contratérmino lineal Y para χ ?
- Calcule las contribuciones 1-loop para cada contratérmino Z_i en el esquema de renormalización $\overline{\text{MS}}$ (substracción mínima modificada)
- Los *bare couplings* están relacionados con los renormalizados segun

$$g_0 = Z_\varphi^{-3/2} Z_g g \tilde{\mu}^{\epsilon/2}, \\ h_0 = Z_\varphi^{-1/2} Z_\chi^{-1} Z_h h \tilde{\mu}^{\epsilon/2}.$$

Defina

$$G(g, h, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(g, h) \epsilon^{-n} \equiv \ln(Z_\varphi^{-3/2} Z_g), \\ H(g, h, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(g, h) \epsilon^{-n} \equiv \ln(Z_\varphi^{-1/2} Z_\chi^{-1} Z_h).$$

Requiriendo que g_0 y h_0 sean independientes de μ , y asumiendo que $dg/d\mu$ y $dh/d\mu$ son finitos en $\epsilon \rightarrow 0$, muestre que

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -\frac{1}{2}\epsilon g + \frac{1}{2}g \left(g \frac{\partial G_1}{\partial g} + h \frac{\partial G_1}{\partial h} \right) \\ \mu \frac{dh}{d\mu} = -\frac{1}{2}\epsilon h + \frac{1}{2}h \left(g \frac{\partial H_1}{\partial g} + h \frac{\partial H_1}{\partial h} \right).$$

d) Use sus resultados de a) para calcular las funciones beta definidas como

$$\beta_g(g, h) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{dg}{d\mu}, \quad \beta_h(g, h) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{dh}{d\mu}.$$

Debería encontrar términos de orden g^3 , gh^2 , y h^3 en β_g , y términos de orden g^2h , gh^2 , y h^3 en β_h

Auxiliar 9

P1

Consideraremos la teoría

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \mathcal{Z}_\psi \partial^\mu \psi \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} \mathcal{Z}_m m^2 \psi^2 + \gamma \psi$$

$$-\frac{1}{2} \mathcal{Z}_\chi \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} \mathcal{Z}_M M^2 \chi^2$$

$$+ \frac{1}{3!} \mathcal{Z}_g g \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \psi^3 + \frac{1}{2!} \mathcal{Z}_h h \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \psi \chi^2 \quad (1)$$

donde estamos considerando dimensión $d = 6 - \epsilon$.

a) Primero calculamos la self-energy a 1-loop para obtener $\mathcal{Z}_\psi, \mathcal{Z}_\chi, \mathcal{Z}_m, \mathcal{Z}_M$. Tendríamos que el propagador exacto por ψ es:

$$\frac{1}{i} \tilde{\Delta}_\psi(k^2) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \dots$$

entonces

$$i\Pi_\psi(k) = \frac{1}{2} \frac{(i\mathcal{Z}_h h \tilde{\mu}^{\epsilon/2})}{i^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + M^2} \frac{1}{(l-k)^2 + M^2} + \frac{1}{2} (i\mathcal{Z}_g g \tilde{\mu}^{\epsilon/2}) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(l-k)^2 + m^2} - i((\mathcal{Z}_\psi - 1)k^2 + (\mathcal{Z}_m - 1)m^2)$$

el tipo A y B

que es una integral que ya conocemos (ver capítulo 14), así que simplemente la usamos

$$\Pi_\psi(k^2) = -\frac{1}{2} \frac{h^2}{(4\pi)^3} \left[\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 \right) \left(\frac{1}{6} k^2 + M^2 \right) + \int_0^1 dx D_M \ln \left(\frac{\mu^2}{D_M} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 \right) \left(\frac{1}{6} k^2 + m^2 \right) + \int_0^1 dx D_m \ln \left(\frac{\mu^2}{D_m} \right) \right]$$

$$- (\mathcal{Z}_\psi - 1)k^2 - (\mathcal{Z}_m - 1)m^2$$

Usando $\overline{\text{MS}}$ scheme **solo matamos la parte divergente**, nada más. De esta forma

$$\mathcal{Z}_\psi = 1 - \frac{1}{6(4\pi)^3} (h^2 + g^2) \frac{1}{\epsilon}$$

$$\mathcal{Z}_m = 1 - \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{h^2 M^2}{m^2} + g^2 \right) \frac{1}{\epsilon}$$

Ahora, el propagador exacto de χ es

$$\frac{1}{i} \tilde{\Delta}_\chi(k^2) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \dots$$

que matemáticamente (ocupando reglas de Feynman) es

$$i\Pi_X(k) = \frac{(iZ_X \hbar \tilde{\mu}^{\epsilon/2})}{i^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(l-k)^2 + M^2} - i((Z_X - 1)k^2 + (Z_X - 1)M^2)$$

no hay división por factor de simetría, $S=1$

donde siguiendo los pasos del Chp 14 le seguimos el rastro a las masas m y M (en ese cálculo $M=m$) y obtenemos

$$\Pi_X(k) = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{(4\pi)^3} \Gamma(-1 + \epsilon/2) \int_0^1 dx D_{m,M} \left(\frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D_{m,M}} \right)^{\epsilon/2} - (Z_X - 1)k^2 - (Z_X - 1)M^2$$

donde

$$D_{m,M} \equiv x(1-x)k^2 + x m^2 + (1-x)M^2$$

así que ocupando que $A^{\epsilon/2} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon)$ y $\Gamma(-1 + \epsilon/2) = -2/\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^0)$, lo que nos interesa eliminar es

$$\begin{aligned} \Pi_X(k) &= \frac{\hbar^2}{(4\pi)^3} \left[\frac{-2}{\epsilon} \int_0^1 dx D_{m,M} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right] - (Z_X - 1)k^2 - (Z_X - 1)M^2 \\ &= -\frac{2\hbar^2}{(4\pi)^3} \left(\frac{1}{6} k^2 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} M^2 \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) - (Z_X - 1)k^2 - (Z_X - 1)M^2 \end{aligned}$$

Ocupando $\overline{MS}$ scheme imponemos que

$$Z_X = 1 - \frac{\hbar^2}{3(4\pi)^3} \frac{1}{\epsilon}, \quad Z_M = 1 - \frac{\hbar^2}{(4\pi)^3} \left(\frac{m^2}{M^2} + 1 \right)$$

Para encontrar Z_g y Z_h tenemos que calcular los vértices exactos. Empecemos por V_3 para 3 partículas φ entrando

$$\begin{aligned} iV_{3,\varphi}(k_1, k_2, k_3) &= \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \dots \\ &= iZ_g g \tilde{\mu}^{\epsilon/2} + \frac{(iZ_g g \tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3}{i^3} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(l+k_2)^2 + m^2} \frac{1}{(l-k_1)^2 + m^2} + (m \rightarrow M) \end{aligned}$$

y ocupando los resultados del capítulo 16 sabemos que es

$$V_{3,\varphi}(k_1, k_2, k_3) = Z_g g + \frac{1}{2} \frac{g^3}{(4\pi)^3} \left[\frac{2}{\epsilon} + \int dF_3 \ln\left(\frac{\mu^2}{D_+}\right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\hbar^3}{(4\pi)^3} \left[\frac{2}{\epsilon} + \int dF_3 \ln\left(\frac{\mu^2}{D_+}\right) \right]$$

$\tilde{\mu}^{\epsilon/2} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon)$

Considerando que $Z_g = 1 + \mathcal{O}(g^2)$ y usando $\overline{MS}$, sustraemos como

$$Z_g = 1 - \frac{1}{(4\pi)^3} \left(g^2 + \frac{\hbar^3}{g} \right) \frac{1}{\epsilon}$$

Hacemos lo mismo para V_3 considerando 2 partículas χ y 1 partícula φ entrantes

$$iV_{3,ex} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3}$$

Diagram 1: A tree-level diagram with an incoming line labeled k_1 and two outgoing lines labeled k_2 and k_3 .

Diagram 2: A loop diagram with an incoming line labeled k_1 and two outgoing lines labeled k_2 and k_3 . The loop momentum is labeled l . The internal lines are labeled $l-k_1$, l , and $l+k_2$.

Diagram 3: A loop diagram with an incoming line labeled k_1 and two outgoing lines labeled k_2 and k_3 . The loop momentum is labeled l . The internal lines are labeled $l-k_1$, l , and $l+k_2$.

$$= iZ_h h \tilde{\mu}^{\epsilon/2} + \frac{(iZ_h h \tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3}{i^3} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + M^2} \frac{1}{(l+k_2)^2 + m^2} \frac{1}{(l-k_1)^2 + M^2}$$

$$+ \frac{(iZ_g g \tilde{\mu}^{\epsilon/2})(iZ_h h \tilde{\mu}^{\epsilon/2})^2}{i^3} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(l+k_2)^2 + M^2} \frac{1}{(l-k_1)^2 + m^2}$$

Nuevamente, no nos interesa la expresión completa de las integrales, sino que el término que va como ϵ^{-1} . De todas formas, tendríamos algo muy parecido a lo de $V_{3,e}$, pero con otro D_m , así que, ignorando términos que no son de interés para $\overline{MS}$,

$$V_{3,ex}(k_1, k_2, k_3) = Z_h h + \frac{1}{2} \frac{h^3}{(4\pi)^3} \left[\frac{z}{\epsilon} + \dots \right] + \frac{1}{2} \frac{g h^2}{(4\pi)^3} \left[\frac{z}{\epsilon} + \dots \right]$$

entonces elegimos el contratérmino como

$$Z_h = 1 - \frac{1}{(4\pi)^3} (h^2 + gh) \frac{1}{\epsilon}$$

con lo que encontramos todos los Z s a 1-loop order.

b) La teoría original de (1) (antes de re-escalar los campos) es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2$$

$$-\frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} M_\chi^2 \chi^2$$

$$+ \frac{1}{3!} g_\phi \phi^3 + \frac{1}{2!} h_\phi \phi \chi^2$$

que identificando término por término obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \triangleright \phi &= Z_\phi^{1/2} \varphi & \triangleright \chi &= Z_\chi^{1/2} \psi \\ \triangleright m_\phi &= Z_\phi^{-1/2} Z_m^{1/2} m & \triangleright M_\chi &= Z_\chi^{-1/2} Z_M^{1/2} M \\ \triangleright g_\phi &= Z_\phi^{-3/2} Z_g g \tilde{\mu}^{\epsilon/2} & \triangleright h_\phi &= Z_\phi^{-1/2} Z_\chi^{-1/2} Z_h h \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \end{aligned}$$

y como $\tilde{\mu}$ es un parámetro artificial e introducido a mano, sabemos que las cantidades sub-0 no pueden depender de μ . Para imponer esto básicamente derivamos c/r a μ e imponemos que sea 0. De forma ordenada lo haremos como sigue: definimos

$$G(g, h, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(g, h) \epsilon^{-n} = \ln(Z_\phi^{-3/2} Z_g), \quad H(g, h, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(h, g) \epsilon^{-n} = \ln(Z_\phi^{-1/2} Z_\chi^{-1/2} Z_h) \quad (*)$$

entonces

$$\begin{aligned}\ln(g.) &= \ln(Z_e^{-\epsilon} Z_g) + \ln(g) + \frac{\epsilon}{2} \ln(\tilde{\mu}) \\ &= G(g, h, \epsilon) + \ln(g) + \frac{\epsilon}{2} \ln(\tilde{\mu})\end{aligned}$$

que derivamos c/r a μ (y multiplicamos por $g\tilde{\mu}$)

$$\begin{aligned}\Rightarrow g\tilde{\mu} \frac{d\ln(g.)}{d\tilde{\mu}} &= g\tilde{\mu} \frac{dG(g, h, \epsilon)}{d\tilde{\mu}} + g\tilde{\mu} \frac{d\ln(g)}{d\tilde{\mu}} + \frac{\epsilon}{2} g \\ &= g \left[\frac{\partial G(g, h, \epsilon)}{\partial g} \frac{dg}{d\ln(\tilde{\mu})} + \frac{\partial G(g, h, \epsilon)}{\partial h} \frac{dh}{d\ln(\tilde{\mu})} \right] + \frac{dg}{d\ln(\tilde{\mu})} + \frac{\epsilon}{2} g \stackrel{!}{=} 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Para h , hacemos algo similar

$$\begin{aligned}\Rightarrow h\tilde{\mu} \frac{d\ln(h.)}{d\tilde{\mu}} &= h\tilde{\mu} \frac{dH(g, h, \epsilon)}{d\tilde{\mu}} + h\tilde{\mu} \frac{d\ln(h)}{d\tilde{\mu}} + \frac{\epsilon}{2} h \\ &= h \left[\frac{\partial H(g, h, \epsilon)}{\partial g} \frac{dg}{d\ln(\tilde{\mu})} + \frac{\partial H(g, h, \epsilon)}{\partial h} \frac{dh}{d\ln(\tilde{\mu})} \right] + \frac{dh}{d\ln(\tilde{\mu})} + \frac{\epsilon}{2} h \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Usando (*) hasta $n=1$

$$(2) \Rightarrow \frac{dg}{d\ln(\tilde{\mu})} \left[\frac{g}{\epsilon} \frac{\partial G_1(g, h)}{\partial g} + 1 \right] + \frac{g}{\epsilon} \frac{\partial G_1(g, h)}{\partial h} \frac{dh}{d\ln(\tilde{\mu})} + \frac{\epsilon}{2} g = 0$$

$$(3) \Rightarrow \frac{dh}{d\ln(\tilde{\mu})} \left[\frac{h}{\epsilon} \frac{\partial H_1(g, h)}{\partial h} + 1 \right] + \frac{h}{\epsilon} \frac{\partial H_1(g, h)}{\partial g} \frac{dg}{d\ln(\tilde{\mu})} + \frac{\epsilon}{2} h = 0$$

Como queremos expresiones para $dg/d\ln\tilde{\mu}$ y $dh/d\ln\tilde{\mu}$, pesamos estas ecs como un sist. algebraico

$$\alpha \cdot \dot{g} + \beta \cdot \dot{h} + \gamma = 0$$

$$a \cdot \dot{h} + b \cdot \dot{g} + c = 0$$

cuya solución exacta es

$$\dot{g} = \frac{-c\beta + a\gamma}{a \cdot \alpha - b\beta}, \quad \dot{h} = \frac{-c\alpha + b\gamma}{-a\alpha + b\beta}$$

$$\begin{pmatrix} g_{2G+1} & g_{2nG} \\ h_{2G} & h_{2nH+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = -\frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = -\frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} g_{2G+1} & g_{2nG} \\ h_{2G} & h_{2nH+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$