Auxiliar 8

Scattering a un loop

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliar: Javier Huenupi

P1.-

Considerando la teoría φ^3, dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 + \frac{Z_g g}{3!} \varphi^3, \tag{1}$$

calcule la amplitud del experimento elástico $\varphi + \varphi \to \varphi + \varphi$, incluyendo todas las correcciones de 1-loop. Para esto intercambie propagadores de Feynman y los vértices usuales por propagadores exactos y vértices exactos. Además, para obtener una expresión cerrada de las integrales, considere el límite de alta energía $s, |t|, |u| \gg m^2$.

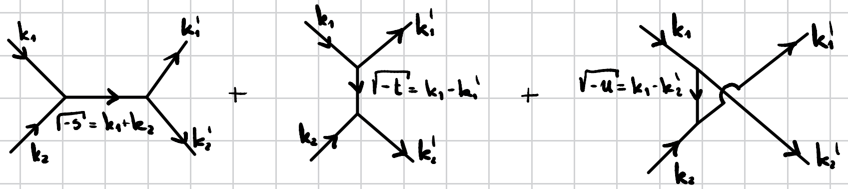
Auxiliar 8

P1

Tenemos la teoría cúbica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 + \frac{Z_g g}{3!} \varphi^3$$

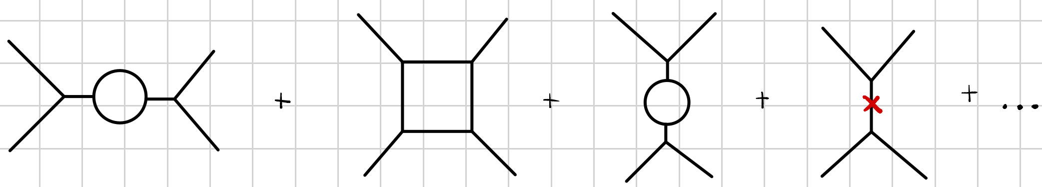
y queremos calcular $i\mathcal{T}$ para $\varphi + \varphi \to \varphi + \varphi$. Sabemos que a tree-level esto es

$i\mathcal{T} =$  $+ \mathcal{O}(g^4)$

$s = -(k_1+k_2)^2$
$t = -(k_1-k_1')^2$
$u = -(k_1-k_2')^2$

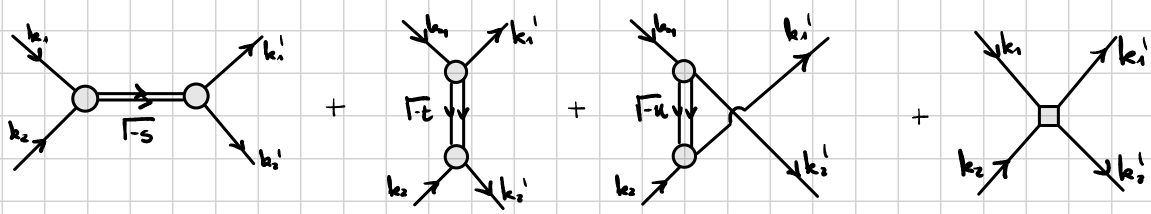
$$= \frac{1}{i}(ig)^2 \left[\tilde{\Delta}(-s) + \tilde{\Delta}(-t) + \tilde{\Delta}(-u) \right] + \mathcal{O}(g^4)$$

Ahora, sabemos que podemos tener diagramas más complejos si consideramos loops, por ej.

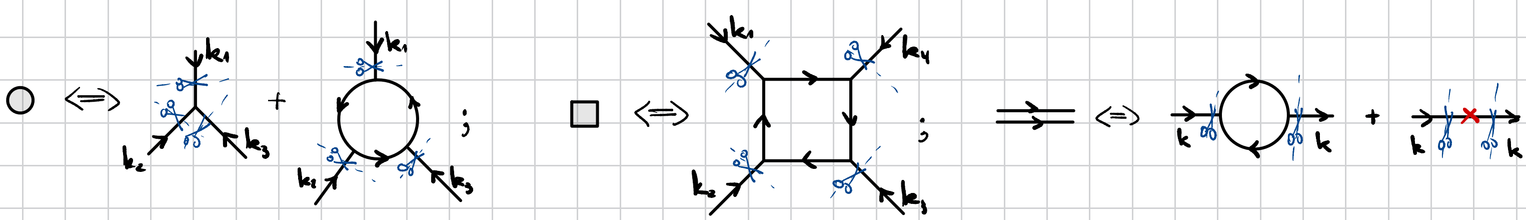
$i\mathcal{T} \supset$ 

que si nos damos cuenta, es lo mismo que cambiar $\tilde{\Delta}(k^2) \longrightarrow \hat{\Delta}(k^2)$ y vértices por $V_n(\{k_i\})$ con n la cantidad de líneas que llegan a ese vértice exacto.

Es por esto que, a one-loop, nuestro experimento es

$i\mathcal{T}_{1\text{-loop}} =$  (1)

donde



Matemáticamente, podemos escribir (1) como

$$iT = \frac{1}{i}\left[[iV_3(s)]^2\,\tilde{\Delta}(-s) + [iV_3(t)]^2\,\tilde{\Delta}(-t) + [iV_3(u)]^2\,\tilde{\Delta}(-u)\right] + iV_4(s,t,u)$$

donde en capítulos pasados del Srednicki se calcularon (eliminando los infinitos también) y son

- $\tilde{\Delta}(-s) = \dfrac{1}{-s+m^2-\Pi(-s)}$, con $\Pi(-s) = \dfrac{1}{2}\alpha\displaystyle\int_0^1 dx\, D_2(s)\ln(D_2(s)/D_0) - \dfrac{1}{12}\alpha(-s+m^2)$

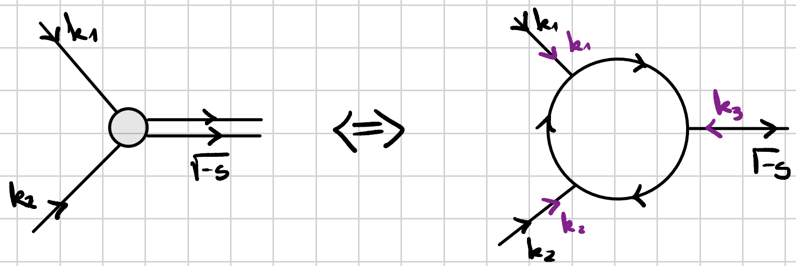
- $\dfrac{V_3(s)}{g} = 1 - \dfrac{1}{2}\alpha\displaystyle\int dF_3 \ln(D_3(s)/m^2)$

- $V_4(s,t,u) = \dfrac{1}{6}g^2\alpha\displaystyle\int dF_4\left[\dfrac{1}{D_4(s,t)} + \dfrac{1}{D_4(t,u)} + \dfrac{1}{D_4(u,s)}\right]$

con las siguientes funciones definidas

- $D_0 = [1 - x(1-x)]m^2$
- $D_2(s) = -x(1-x)s + m^2$
- $D_3(s) = -x_1x_2 s + [1-(x_1+x_2)x_3]m^2$
- $D_4(s,t) = -x_1x_2 s - x_3x_4 t + [1-(x_1+x_2)(x_3+x_4)]m^2$

* Ojo que originalmente V_n depende de n-momentums entrantes, pero para las líneas externas consideramos que su momentum respectivo está on-shell, $k_i^2 = -m^2$. Sin embargo, si este momentum está fluyendo en una línea interna, ya no se considera como on-shell.



$= iV_3(k_1,k_2,k_3) = iV_3(m,m,-\sqrt{-s}) = iV_3(s)$

Ahora, consideramos el caso de altas energías donde las partículas van "muy rápido", o sea

$$s,\ |t|,\ |u| \gg m^2$$

De esta forma podemos simplemente considerar $m=0$ (aunque cuidado si está dividiendo). Por lo tanto, la self-energy sería

$$\frac{D_2(s)}{D_0} = \frac{-x(1-x)s + \cancel{m^2}^{\sim 0}}{[1-x(1-x)]m^2} = \frac{x(1-x)}{1-x(1-x)}\cdot\frac{-s}{m^2}$$

$$\Rightarrow \Pi(-s) = -\frac{1}{2}\alpha s\int_0^1 dx\, x(1-x)\left[\ln\left(\frac{x(1-x)}{1-x(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right)\right] + \frac{1}{12}\alpha s$$

que se puede resolver de forma cerrada (con Mathematica) y obtener

$$\Pi(-s) = -\frac{1}{12}\alpha s\left[\ln(-s/m^2) + 3 - \pi\sqrt{3}\right]$$

que debemos reemplazar en el propagador exacto

$$\tilde{\Delta}(-s) = \frac{1}{-s + \cancel{m^2}^{\sim 0} - \Pi(-s)} = \frac{1}{-s+\epsilon} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad , \quad \epsilon \equiv -\Pi(-s)$$

orden $\mathcal{O}(\alpha^1)$

$$= -\frac{1}{s}\left[1 + \frac{1}{12}\alpha\left[\ln(-s/m^2) + 3 - \pi\sqrt{3}\right]\right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \qquad (2)$$

Veamos ahora V_3 en el límite $s, |t|, |u| \gg m^2$

$$V_3(s) = g - \frac{1}{2}g\alpha\int dF_3 \, \ln\left[\frac{-x_1x_2 s + \cancel{[1-(x_1+x_2)x_3]m^2}^{\sim 0}}{m^2}\right]$$

$$= g - \frac{1}{2}g\alpha\int dx_1 dx_2 \left(\ln\left[\frac{-s}{m^2}\right] + \ln[x_1x_2]\right) \qquad * \int_0^1 dx_3 \cdot cte = 1$$

$$= g - \frac{1}{2}g\alpha\left(\ln\left[\frac{-s}{m^2}\right] - 3\right)$$

y por último, para V_4 tenemos algo como

$$V_4(s,t,u) \supset \int dF_4 \, \frac{1}{D_4(s,t)} = \int dF_4 \frac{1}{-x_1x_2 s - x_3x_4 t + \cancel{[1-(x_1+x_2)(x_3+x_4)]m^2}^{\sim 0}}$$

$$= \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \, \frac{1}{-x_1x_2 s - x_3(1-x_1-x_2-x_3)t}$$

$$= -\frac{3}{s+t}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]^2\right)$$

Juntamos todo

$$iT_{1\text{-loop}} \supset \frac{1}{i}[iV_3(s)]^2 \, \tilde{\Delta}(-s) + i\frac{1}{6}g^2\alpha\int dF_4 \, \frac{1}{D_4(s,t)}$$

$$= i\left\{g - \frac{1}{2}g\alpha\left(\ln\left[\frac{-s}{m^2}\right] - 3\right)\right\}^2 \cdot \left(-\frac{1}{s}\right)\left\{1 + \frac{1}{12}\alpha\left(\ln\left[\frac{-s}{m^2}\right] + 3 - \pi\sqrt{3}\right)\right\} - i\frac{1}{2}g\alpha^2\frac{1}{s+t}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]^2\right)$$

que quedándonos hasta orden $g^2\alpha$ sería

$$= -\frac{i}{s}\left\{g^2 - g^2\alpha\left(\ln\left[\frac{-s}{m^2}\right] - 3\right)\right\} \times \left\{1 + \frac{1}{12}\alpha\left(\ln\left[\frac{-s}{m^2}\right] + 3 - \pi\sqrt{3}\right)\right\} - i\frac{1}{2}g\alpha^2\frac{1}{s+t}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]^2\right)$$

$$= -\frac{ig^2}{s}\left\{ 1 - \alpha\left[\frac{11}{12}\ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) - \frac{13}{12} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \right]\right\} - i\frac{1}{2}g\alpha^2 \frac{1}{s+t}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]^2\right)$$

$$= -\frac{ig^2}{s}\left\{ 1 - \frac{11}{12}\alpha\left[\ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \frac{(\pi\sqrt{3} - 13)}{11} \right]\right\} \underbrace{- i\frac{1}{2}g\alpha^2 \frac{1}{-u}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]^2\right)}_{(*)} \quad (3)$$

Notemos que para los términos faltantes $[iV_3(t)]^2\tilde{\Delta}(-t) + [iV_3(u)]^2\tilde{\Delta}(-u)$ basta con hacer el cambio $s \longrightarrow t, u$ en (3)

$$\Rightarrow \frac{1}{i}\left[[iV_3(s)]^2\tilde{\Delta}(-s) + [iV_3(t)]^2\tilde{\Delta}(-t) + [iV_3(u)]^2\tilde{\Delta}(-u)\right] = ig^2\sum_{x=s,t,u} \frac{-1}{x}\left(1 - \frac{11}{12}\alpha\left[\ln\left(\frac{-x}{m^2}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}-13}{11}\right]\right) \quad (4)$$

Mientras que para los otros dos términos de iV_4 hay que hacer $s \to t \wedge t \to u$ y para el otro $s \to u \wedge t \to s$ en la función $(*)$

$$\Rightarrow iV_4(s,t,u) = -i\frac{1}{2}g\alpha^2\left[\frac{1}{s+t}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]^2\right) + \frac{1}{t+u}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{t}{u}\right)\right]^2\right) + \frac{1}{u+s}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{u}{s}\right)\right]^2\right)\right]$$

que usando el hecho que (con $m=0$) $s+t+u=0$

$$= i\frac{1}{2}g\alpha^2\left[\frac{1}{u}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right]^2\right) + \frac{1}{s}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{t}{u}\right)\right]^2\right) + \frac{1}{t}\left(\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{u}{s}\right)\right]^2\right)\right]$$

que añadiéndolo a (4)

$$iT_{1\text{-loop}} = ig^2\left[F(s,t,u) + F(t,u,s) + F(u,s,t)\right]$$

donde

$$F(s,t,u) = -\frac{1}{s}\left(1 - \frac{11}{12}\alpha\left[\ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \frac{\pi\sqrt{3} - 13 + 6\pi^2}{11}\right] - \frac{1}{2}\alpha\left[\ln\left(\frac{t}{u}\right)\right]^2\right)$$