Auxiliar 8

Mapas de Poincaré y Modelo de Lorenz

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Mapa de Poincaré

Considere que el movimiento de una partícula está dada por el campo vectorial en coordenadas polares

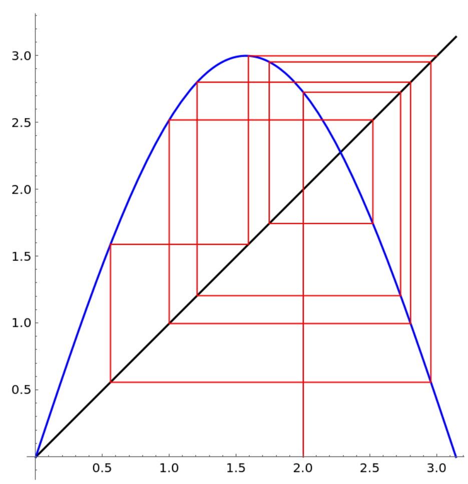
$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$
$$\dot{\theta} = 1$$

Coloque la sección de superficie S (ver Figura de la derecha) en el plano $x - z$ de coordenadas cartesianas.

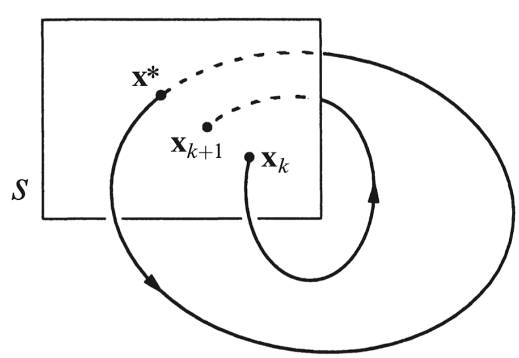
a) Identifique el periodo de la órbita y calcule la solución de $r(t)$

b) Utilice un gráfico *cobweb* (ver Figura de la izquierda) para mostrar que el sistema tiene una única órbita periódica, y calcúlela

c) Analíticamente, analice la estabilidad de la órbita periódica encontrada utilizando la ecuación linealizada y la ecuación de valores propios asociada



(a) Gráfico *cobweb*



(b) Sección de superficie S, perpendicular al flujo de órbitas

P2.- Mapa de Lorenz

Considere el mapa de tipo carpa

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n\,, & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2 - 2x_n\,, & 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

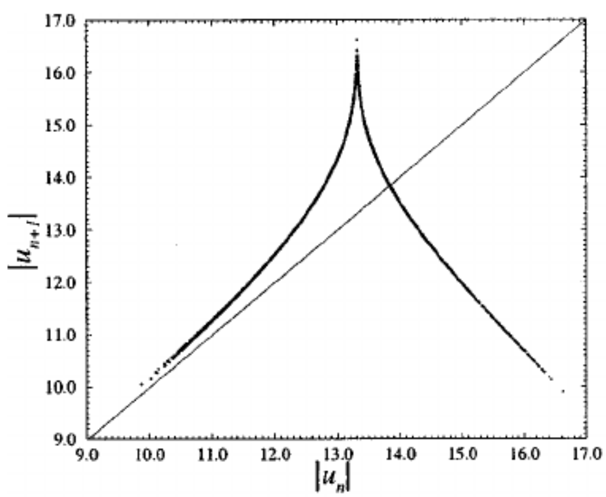
como un modelo analítico simple del mapa de Lorenz

a) ¿Por qué se le conoce como *mapa de carpa*?

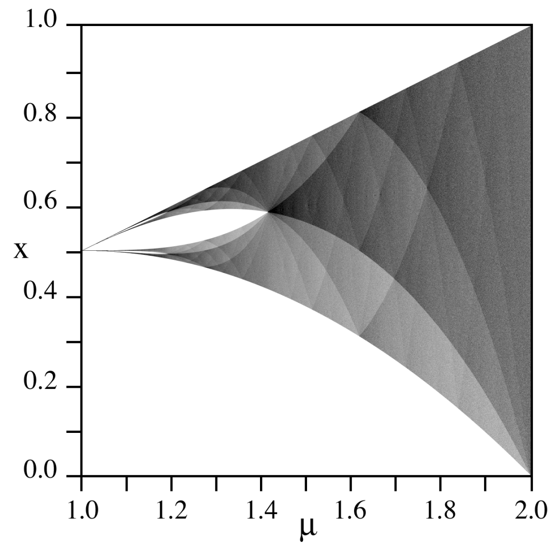
b) Encuentre todos los puntos fijos y clasifique sus estabilidades

c) Muestre que el mapa tiene una órbita de periodo-2, ¿es estable o inestable?

d) ¿Puede encontrar algún punto de periodo-3? ¿y de periodo-4? Si así es, ¿las órbitas periódicas correspondientes son estables o inestables?



(c) Mapa de Lorenz original



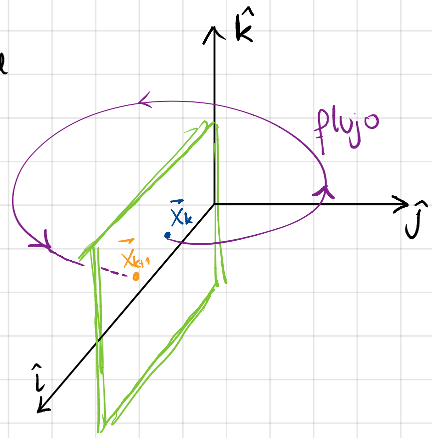
(d) Diagrama de bifurcación de un mapa de carpa

Auxiliar 8

P1

a) Tenemos $\dot{r} = r(1-r^2)$ y $\dot{\theta} = 1$, esta última nos dice que

$$\theta(t) = t - t_0 = t$$



y si elegimos el S en el plano X-Z, entonces si la partícula parte en este plano, lo cruzará por primera vez luego de una vuelta completa, o sea luego de $t = 2\pi$ (y $2\pi n$ para n vueltas).

Entonces resolvamos la EDO de r integrando desde $t_0 \stackrel{!}{=} 0$ a $t = 2\pi$

$$\Rightarrow \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r - r^3} = \int_{t_0=0}^{t=2\pi} dt = 2\pi$$

resolviendo la parte radial

$$\Leftrightarrow \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^3(1/r^2 - 1)}, \quad u \equiv \frac{1}{r^2} - 1 \Rightarrow du = -\frac{2}{r^3} dr$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_1} \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln u \Big|_{u_0}^{u_1} = \ln(u^{-1/2}) \Big|_{u_0}^{u_1} = \ln\left(\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)^{-1/2}\right)\Big|_{r_0}^{r_1} = \ln\left(\left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)^{1/2} \Big/ \left(\frac{1}{r_1^2} - 1\right)^{1/2}\right)$$

reemplazando

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) \Big/ \left(\frac{1}{r_1^2} - 1\right)\right) = 2\pi$$

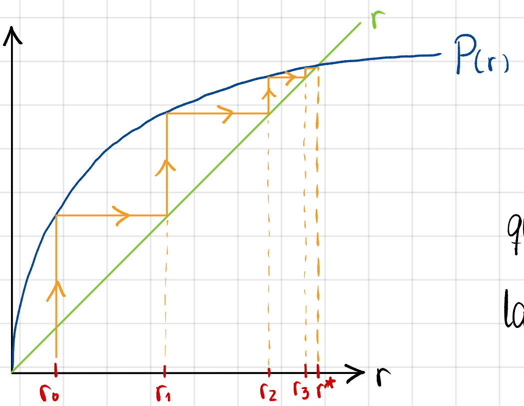
$$\Rightarrow e^{-4\pi}\left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) = \frac{1}{r_1^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow r_1 = \left(e^{-4\pi}\left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) + 1\right)^{-1/2}$$

lo que define nuestra iteración $x_{k+1} = P(x_k)$, donde tendríamos

$$P(r) = \left(e^{-4\pi}(r^{-2} - 1) + 1\right)^{-1/2}$$

Esta función la podemos usar para iterar gráficamente nuestra relación. Para esto debemos graficar $P(x)$ junto con la identidad $f(x) = x$



Donde notamos que sin importar el valor inicial de la iteración, la recurrencia tiende a

$$r^* = 1$$

que es exactamente un punto fijo (estable) del sist. $\dot{r} = r - r^3$

Ojo que si $r_0 > r^*$, el sist. también tiende a r^*, ya que la escalera iría "bajando"

b) Para analizar la estabilidad de un punto fijo de un sist. $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ utilizando Mapas de Poincaré debemos calcular los autovalores asociados a $DP(x^*)$, el Jacobiano de P evaluado en los puntos fijos que deseamos analizar. Una órbita cerrada es linealmente estable ssi $|\lambda_k| < 1 \ \forall k$

Notamos que podemos ir más rápido si linealizamos la EDO. Nuestro punto fijo es $r^* = 1$, así que perturbamos r como $r(t) = 1 + \delta r(t)$ con $|\delta r| \ll 1 \ \forall t$

$$\Rightarrow \dot{\delta r} = 1 + \delta r - (1+\delta r)^3 = 1 + \delta r - (1 + 3\delta r + 3\delta r^2 + \delta r^3)$$

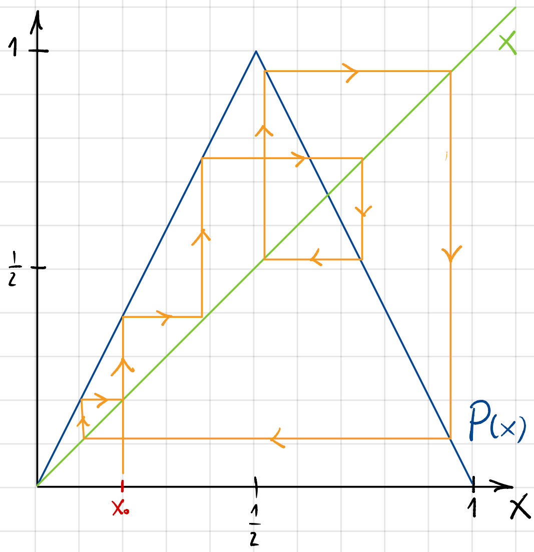
$$= -2\delta r + \cancel{O(\delta r^2)}^{\sim 0}$$

$$\therefore \dot{\delta r} = -2\delta r \Rightarrow \delta r = \delta r_0 e^{-2t}$$

y como el flujo vuelve a atravesar S luego de un $t = 2\pi$ $\Rightarrow \delta r_1 = e^{-4\pi} \delta r_0$, así que $e^{-4\pi}$ es nuestro valor propio y cumple con que $|e^{-4\pi}| < 1$, así que el equilibrio es linealmente estable

P2

a) Hagamos algo similar a lo anterior. Grafiquemos $P(x)$



$$x_{n+1} = P(x_n) = \begin{cases} 2x_n & \text{si} \quad 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2-2x_n & \text{si} \quad 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que se le llama mapa de carpa por la forma de $P(x)$

b) Los puntos fijos cumplen con que $x_n = P(x_n)$, o sea que el sist. se queda quieto en ese punto y no cambia mientras seguimos iterando.

Para la primera parte de la carpa hacemos la imposición

$$x_n = 2x_n$$

que se cumple ssi $x_n = 0$, mientras que para el segundo tramo de la carpa  imponemos

$$x_n = 2-2x_n \Rightarrow x_n = 2/3$$

$$\therefore \text{ Los ptos. fijos de este sist. son } x^* \in \{0, 2/3\}$$

Para analizar la estabilidad, para el pto. $x^*=0$ consideramos el tramo $2x_n$

$$\Rightarrow P(x) = 2x \Rightarrow \frac{dP(x)}{dx} = 2 > 1 \qquad \therefore x^* = 0 \text{ es inestable}$$

mientras que para $x^* = 2/3$ consideramos el tramo $P(x) = 2-2x \Rightarrow P'(x) = -2 < -1 \therefore x^* = 2/3$ es inestable

c) Una órbita de periodo-2 corresponde a un punto que luego de ser iterado dos veces, se vuelve al mismo punto (un pto. fijo sería una órbita de periodo-1). Encontremos un x_0 que cumpla esto

$$x_2 = P(x_1) = P(P(x_0)), \text{ donde } x_2 \overset{!}{=} x_0$$

veamos si se cumple considerando solo el primer tramo

$$x_0 \overset{!}{=} P(P(x_0)) = P(2x_0) = 2\cdot(2x_0) = 4x_0 \quad \therefore x_0 = 0$$

pero $x_0 = 0$ es un punto fijo, así que consideremos un x_0 que pasa del primer al segundo tramo.

$$x_0 \overset{!}{=} P(2x_0) = 2-4x_0 \Rightarrow x_0 = 2/5$$

como $x_0 = 2/5 < 1/2$ y $P(2/5) = 4/5 > 1/2$, entonces este sí es un pto. de periodo-2. La ec. de este pto es

$$x_{n+1} = 2-4x_n \Rightarrow \tilde{P}(x) = 2-4x \Rightarrow |\tilde{P}'(x)| > 1 \quad \therefore x_0 = 2/5 \text{ es inestable}$$

d) Busquemos un pto. de periodo-3, sabemos no se puede mantener solo en el primer tramo

$$x_0 \overset{!}{=} 2^3 \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = 0$$

probemos $x_0 = P_1(P_2(P_1(x_0))) = P_1(P_2(2x_0)) = P_1(2-4x_0) = 4-8x_0 \Rightarrow x_0 = 4/9$, donde

$$x_0 = 4/9 < 1/2,\ P_1(4/9) = 8/9 > 1/2,\ P_2(8/9) = 2 - 16/9 = 2/9 < 1/2 \ \wedge\ P_1(2/9) = 4/9 = x_0$$

así que se cumplen todas las hipótesis y $x_0 = 4/9$ sería un pto. de periodo-3. Como su ec. es de la forma

$$x_{n+1} = 4 - 8x_n \Rightarrow \tilde{P}(x) = 4 - 8x \Rightarrow |\tilde{P}'(x)| > 1$$

$$\therefore x_0 = 4/9 \text{ es inestable}$$

Queda propuesto el punto de periodo-4