Auxiliar 8

Dinámica IV

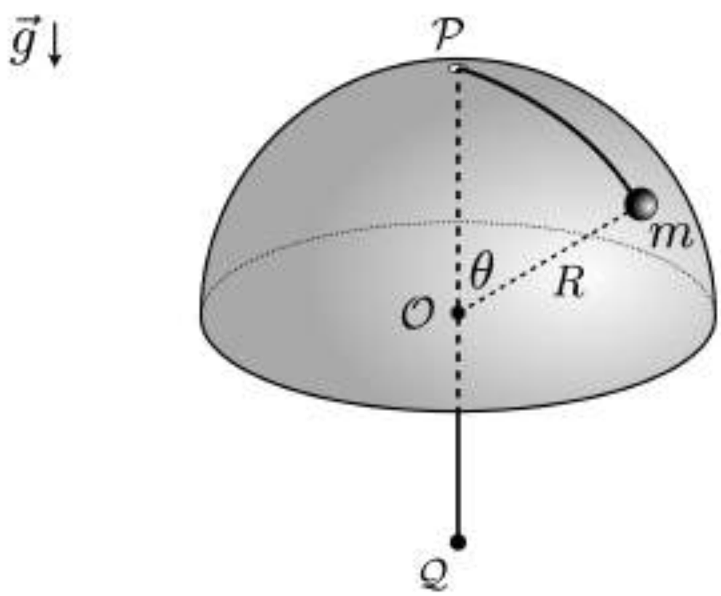
Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.- Control 1 2023

Una bolita de masa m se desliza sin roce sobre un cascarón semi-esférico hueco de radio R. La partícula se encuentra atada a una cuerda ideal que penetra hacia el interior del cascarón por su punto más alto $\mathcal{P}$, como muestra la figura.

a) Si el extremo $\mathcal{Q}$ de la cuerda se mantiene fijo, tal que el ángulo zenital de la partícula se mantiene siempre en $\theta = \pi/3$, determine la máxima velocidad angular $\dot{\phi} = \omega_{\max}$ en torno al eje OP que puede tener la partícula, tal que ella **no se separe del cascarón**

b) Si en un segundo experimento la partícula tiene inicialmente $\theta = \pi/3$ y una velocidad angular $\dot{\phi}_0 = \omega_{\max}/3$ en torno a $\mathcal{OP}$ y el extremo $\mathcal{Q}$ de la cuerda es tirado hacia abajo con rapidez v_0 constante, encuentre una expresión para la fuerza normal que el cascarón ejerce sobre la partícula en función del ángulo θ



P2.- Control 1 2024

Una partícula P de masa m cuelga de una cuerda AP de largo L cuyo extremo superior permanece fijo en A. La partícula realiza un movimiento circular sobre la superficie de una esfera de radio L cuyo origen $\mathcal{O}$ se encuentra justo debajo de A, a una distancia $\sqrt{2}L$. Inicialmente la partícula gira en torno al eje $\mathcal{O}A$ con una velocidad angular ω_0, tal que la fuerza normal que la esfera ejerce sobre P es nula. Además, sobre la partícula actúa una fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (ver Figura) y una fuerza de roce cinética de la forma $\vec{F}_{\text{roce}} = -F_0\hat{t}$, donde $\hat{t} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$ y F_0 es una constante positiva. **Cuidado**: note que esta fuerza no coincide con la fuerza de roce cinética vista en clases.

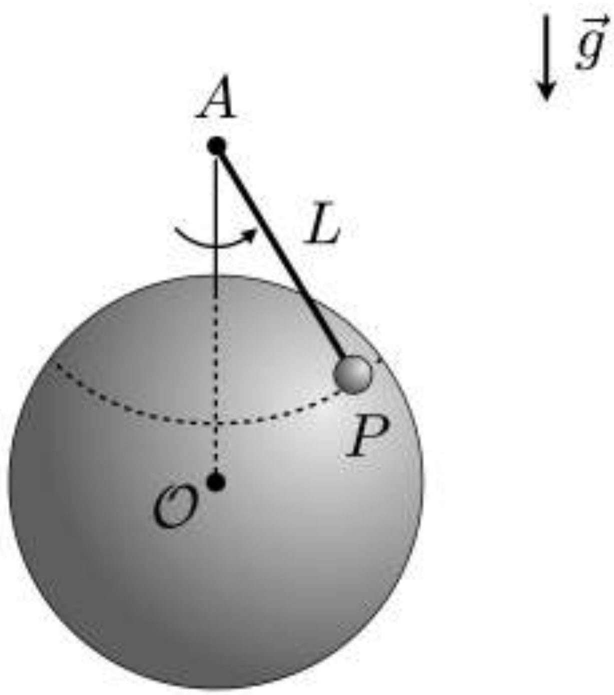
a) Identifique todas las fuerzas y obtenga la ecuación de movimiento respetada por la partícula utilizando coordenadas esféricas $\vec{r} = L\hat{r}$

b) Determine el valor de la velocidad angular inicial ω_0 como función de L y g

c) Encuentre la velocidad angular de la partícula en torno al eje $\mathcal{O}A$, como función del ángulo barrido por la partícula desde el momento inicial

d) Determine el valor de la fuerza que la cuerda ejerce sobre la partícula en función del ángulo de barrido por la partícula desde el momento inicial

e) Obtenga el ángulo total ϕ_{tot} que barre P desde el momento inicial hasta que se detiene



Formulario

Ecuación de movimiento

La segunda Ley de Newton nos indica una relación entre la aceleración de una partícula puntual y las fuerzas que actúan sobre ella. Es una ecuación diferencial de segundo orden dada por

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

donde m es la masa de la partícula, $\vec{a}$ su aceleración, y $\vec{F}_i$ la i-ésima fuerza actuando sobre ella (se suman todas las contribuciones).

Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas esféricas** están dados por:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\phi} \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}\end{aligned}$$

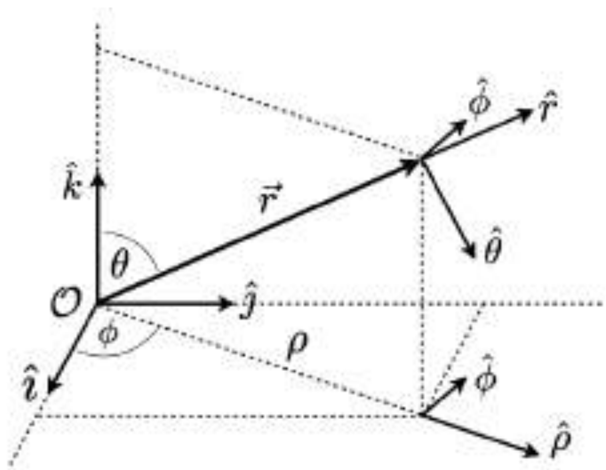
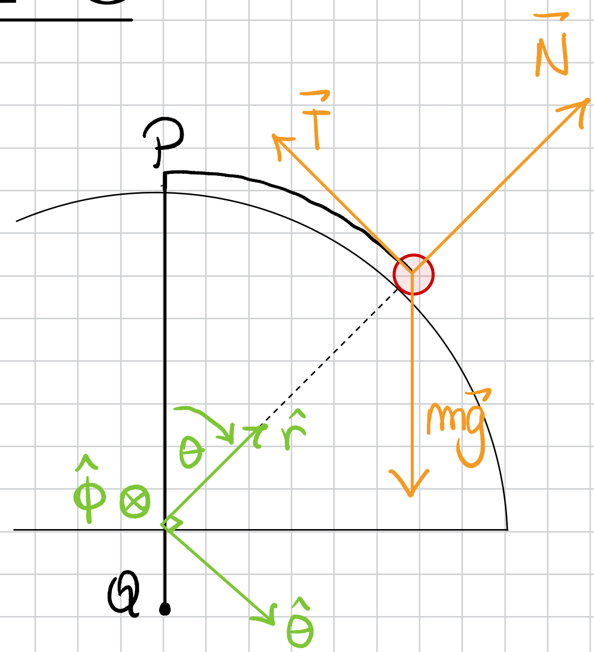


Figura 1: Coordenadas esféricas

Auxiliar 8

P1



a) Ocuparemos coord. esféricas donde

$$r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

y para este ítem el ángulo θ es cte., o sea

$$\theta = \pi/3 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

mientras que para ϕ no podemos decir mucho por el momento.
Por lo tanto, la aceleración sería

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2 \sin^2\theta_o \,\hat{r} - R\dot{\phi}^2 \sin\theta_o \cos\theta_o \,\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta_o}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta_o\right)\hat{\phi}.$$

Mientras que las fuerzas serían 3:

- Normal: $\vec{N} = N\hat{r}$, con $N \equiv \|\vec{N}\| \geq 0$
- Tensión de la cuerda: $\vec{T} = -T\hat{\theta}$, con $T \equiv \|\vec{T}\| > 0$
- Peso: $m\vec{g} = -mg\cos\theta_o \,\hat{r} + mg\sin\theta_o \,\hat{\theta}$

Reemplazando en 2da Ley de Newton obtenemos la EoM vectorial

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow \; -mR\dot{\phi}^2\sin^2\theta_o \,\hat{r} - mR\dot{\phi}^2\sin\theta_o\cos\theta_o \,\hat{\theta} + \frac{m}{R\sin\theta_o}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta_o\right)\hat{\phi} = N\hat{r} - T\hat{\theta} - mg\cos\theta_o \,\hat{r} + mg\sin\theta_o \,\hat{\theta}$$

de donde podemos obtener las EoMs escalares

$$\hat{r})\quad -mR\dot{\phi}^2\sin^2\theta_o = N - mg\cos\theta_o$$

$$\hat{\theta})\quad -mR\dot{\phi}^2\sin\theta_o\cos\theta_o = -T + mg\sin\theta_o$$

$$\hat{\phi})\quad \frac{m}{R\sin\theta_o}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta_o\right) = 0$$

Ahora, sabemos que la rapidez máxima ω_{max} está condicionada a que la partícula siga en contacto con el cascarón, entonces el caso límite va a estar dado cuando se cumpla que $N(\omega_{max}) = 0$.

Notamos que justamente $\hat{r})$ nos da una relación entre N y $\dot{\phi}$, así que imponiendo $N=0$

$$\hat{r}) \Rightarrow N(\omega_{máx}) = mg\cos\theta_0 - mR\omega_{máx}^2 \sin^2\theta_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega_{máx} = +\sqrt{\frac{g}{R}\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}} \stackrel{\theta_0=\pi/3}{=} \boxed{\sqrt{\frac{2g}{3R}}}$$

b) Ya no tenemos la condición $\theta=\pi/3\ \forall t$, sino que ahora depende de v_0. Rápidamente podríamos decir que $\dot{\theta}=-v_0/R$, pero para verlo tomemos el caso de la Fig 2. Imaginemos que tenemos en Q una partícula que baja verticalmente con rapidez v_0, entonces la "altura" z iría aumentando como

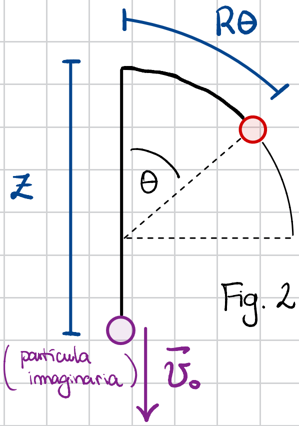


Fig. 2

$$\frac{dz}{dt} = v_0$$

También, imaginemos que la cuerda mide L, entonces $L = z + R\theta$, que tomando su derivada temporal (y considerando una cuerda ideal t.q. L es cte.)

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{=v_0} + R\frac{d\theta}{dt} \stackrel{dL/dt=0}{=} 0$$

entonces $\dot{\theta} = -v_0/R$ como esperábamos. Ahora sí podemos volver a hacer 2da Ley de Newton considerando

$$\vec{a} = \left(-\frac{v_0^2}{R} - R\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} - R\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)\hat{\phi}$$

y que las fuerzas tienen la misma forma de **a)**. Así que las EoMs escalares serían

$$\hat{r})\ -m\frac{v_0^2}{R} - R\dot{\phi}^2\sin^2\theta = N - mg\cos\theta$$

$$\hat{\theta})\ -mR\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -T + mg\sin\theta$$

$$\hat{\phi})\ \frac{m}{R\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0$$

De $\hat{r})$ tenemos que

$$N(\theta,\dot{\phi}) = mg\cos\theta - m\frac{v_0^2}{R} - R\dot{\phi}^2\sin^2\theta \quad (1)$$

pero nosotros queremos que sea una función únicamente de θ (y constantes), por lo que necesitamos una forma de conseguir $\dot{\phi}=\dot{\phi}(\theta)$.

Para esto usaremos $\hat{\phi})$, ya que sabemos si $\dot{f}(t)=0\ \forall t$ entonces $f(t)=f(0)\ \forall t$. Así que

$$R^2\dot{\phi}(t)\sin^2(\theta(t)) = R^2\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0 \quad (2)$$

donde $\dot{\phi}_0 := \dot{\phi}(0)$ y $\theta_0 := \theta(0)$, que son C.I. dadas en el enunciado: $\dot{\phi}_0 = \omega_{max}/3$ y $\theta_0 = \pi/3$.

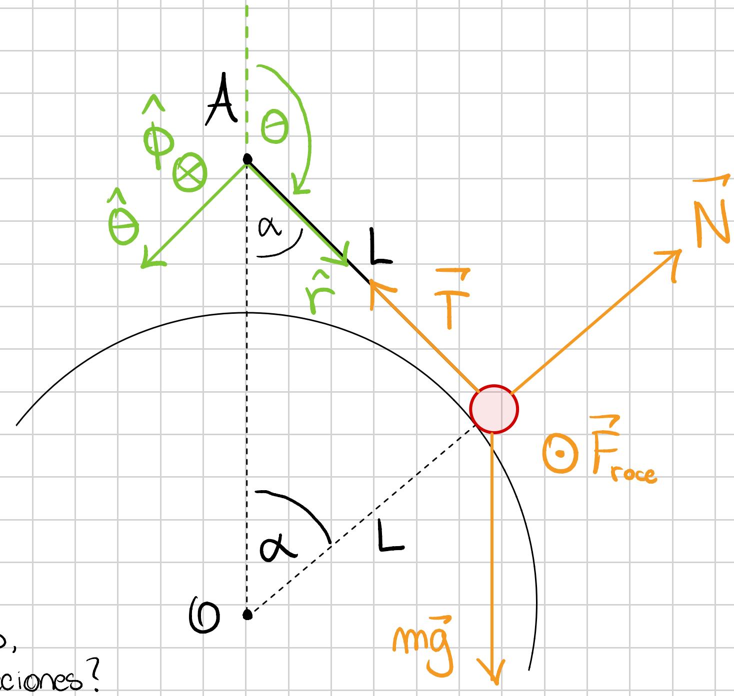
Reemplazando en (2) obtenemos una expresión de $\dot{\phi}$ en función de θ

$$(2) \Rightarrow \dot{\phi}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{\omega_{max}}{\sin^2\theta}$$

que podemos reemplazar en (1) y obtener lo deseado

$$\boxed{N(\theta) = mg\cos\theta - m\frac{v_0^2}{R} - \frac{R}{16}\frac{\omega_{max}^2}{\sin^2\theta}}$$

P2



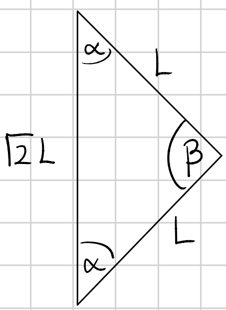
a) Usaremos coord. esféricas centradas en A como se muestra en la Figura. Como la cuerda es de largo L constante

$$r = L \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

y el ángulo zenital θ también es constante

$$\theta = \theta_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

Además, sabemos que hay 4 fuerzas: normal, peso, la tensión y el roce. Sin embargo, cuáles son sus direcciones?



Consideremos un triángulo como el de la figura. Usando teo. del coseno

$$2L^2 = L^2 + L^2 - 2L^2 \cos\beta$$

donde vemos que $\cos\beta = 0$, o sea, $\beta = \pi/2 = 90°$. Con esta información sabemos que

- Normal: $\vec{N} = -N\hat{\theta}$, con $N \equiv \|\vec{N}\| > 0$
- Peso: $m\vec{g} = +mg\cos\alpha\,\hat{\theta} + mg\sin\alpha\,\hat{r}$, donde $\alpha = \pi/4$
- Tensión: $\vec{T} = -T\hat{r}$, con $T \equiv \|\vec{T}\| > 0$
- Roce: $\vec{F}_{roce} = -F_0\hat{t} = -F_0\hat{\phi}$, ya que $\hat{t} = \vec{v}/\|\vec{v}\| = L\dot{\phi}\sin\theta_0\hat{\phi}/L\dot{\phi}\sin\theta_0 = \hat{\phi}$

Hacemos 2ª Ley de Newton

$$-mL\dot{\phi}^2\sin^2\theta_0\hat{r} - mL\dot{\phi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0\hat{\theta} + mL\ddot{\phi}\sin\theta_0\hat{\phi} = -N\hat{\theta} + mg\cos\alpha\,\hat{\theta} + mg\sin\alpha\,\hat{r} - T\hat{r} - F_0\hat{\phi}$$

y las EoMs escalares serían

$\hat{r})$ $-mL\dot{\phi}^2\sin^2\theta_0 = mg\sin\alpha - T$

$\hat{\theta})$ $-mL\dot{\phi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = -N + mg\cos\alpha$

$\hat{\phi})$ $mL\ddot{\phi}\sin\theta_0 = -F_0$

b) Queremos la velocidad angular inicial ω_0 que, por enunciado, cumple que $N = 0$ (en el instante inicial). De $\hat{\theta})$ simplemente tomamos $N \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(0) = \omega_0 = + \sqrt{-\frac{g}{L}\frac{\cos\alpha}{\sin\theta_0 \cos\theta_0}} \overset{\theta_0 = \pi - \pi/4 \,\wedge\, \alpha = \pi/4}{=} \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{L}}}$$

c) Queremos $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi)$, por lo que integraremos $\hat{\phi}$) (donde F_0 es cte.) con truco de mecánica

$$\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{F_0}{mL\sin\theta_0} \quad / \int_0^{\phi} d\phi$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\dot{\phi}(\phi)} \dot{\phi}\, d\dot{\phi} = -\frac{F_0}{mL\sin\theta_0}\int_0^{\phi} d\phi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\phi}(\phi) = + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2F_0 \cdot \phi}{mL\sin\theta_0}}} \quad (1)$$

d) De $\hat{r}$) obtenemos una expresión de $T = T(\dot{\phi})$, que reemplazando con (1) sería

$$T(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2}mg + \frac{1}{2}mL\left(\omega_0^2 - \frac{2\sqrt{2}F_0}{mL}\phi\right)$$

e) La partícula se detiene cuando $\dot{\phi} = 0$, entonces de (1) despejamos

$$\omega_0^2 - \frac{2\sqrt{2}F_0}{mL}\phi_{tot} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{tot} = \frac{mL\omega_0^2}{2\sqrt{2}F_0}}$$