

## Auxiliar 7

Repaso: reglas de Feynman, propagadores y vértices exactos

**Profesor: Gonzalo Palma**  
 Auxiliar: Javier Huenupi

**P1.-**

Considere la teoría *bare*  $\phi^4$  dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4. \quad (1)$$

Nótese que este es el *guess* inicial de nuestro Lagrangiano y por eso usamos en subíndice 0. Faltaría hacer la redefinición del campo  $\phi_0 \rightarrow Z^{1/2}\phi$  para hacer aparecer los  $Z$ s y con ello los contratérminos. Sin embargo, por el momento solo nos interesa aprender a ocupar las reglas de Feynman para calcular amplitudes, así que trabajaremos con esta teoría *desnuda*.

- Enuncie (usando dibujos y asignándoles su representación matemática) las reglas de Feynman para esta teoría  $\phi^4$ .
- Usando estas reglas, calcule la matriz  $i\mathcal{T}$  **hasta** orden  $\lambda^2$  para un experimento de la forma  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ . Notará que sólo tendrá diagramas *tree-level* para  $\mathcal{O}(\lambda)$ , pero tendrá que considerar loops para los diagramas  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ . No es necesario que resuelva las integrales.

**P2.-**

Considere la teoría  $\varphi^3$  dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\varphi\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}Z_m m^2\varphi^2 + \frac{g}{3!}Z_g\varphi^3, \quad (2)$$

donde ya hicimos la redefinición  $\varphi_0 \rightarrow Z_\varphi^{1/2}\varphi$  y asumiremos que cada  $Z_i$  cumple que  $Z_i = 1 + \mathcal{O}(g)$ . Además, consideraremos que ya eliminamos los *tadpoles* usando el contratérmino implícito  $Y$ .

- Enuncie las reglas de Feynman para esta teoría  $\varphi^3$  (ojo con el signo en frente de  $g$ )
- Usando estas reglas, calcule la matriz  $i\mathcal{T}$  a orden más bajo para un experimento de la forma  $\varphi\varphi \rightarrow \varphi\varphi$ . En este caso el orden más bajo es  $\mathcal{O}(g^2)$  y es *tree-level* (a diferencia del problema anterior)
- Sabemos que  $g$  es adimensional en  $d = 6$ , entonces definiremos  $d = 6 - \epsilon$  tal que  $\epsilon$  nos permita cuantificar las divergencias que vendrán (regularización dimensional). Introduzca el parámetro de masa  $\tilde{\mu}$  (que tiene dimensiones de masa) multiplicando a  $g$ , tal que este  $g$  sea adimensional.

- d) Usando las reglas de a) y trabajando en  $d = 6 - \epsilon$ , calcule a orden más bajo la *self-energy* asociada a esta teoría, ignorando contratérminos. Para resolver las integrales ocupe la fórmula de Feynman
- e) Calcule a orden más bajo el vértice exacto  $\mathbf{V}_4$ , que consiste en un diagrama 1PI con 4 líneas externas con momentum  $k_1, k_2, k_3, k_4$  que cumplen que  $\sum_i k_i = 0$ .

# Auxiliar 7

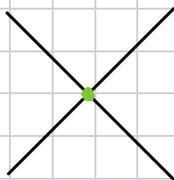
P1

Consideraremos la teoría bare

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 \quad (1)$$

a) Para campos escalares las reglas de Feynman serán siempre iguales, la única que cambia es el tipo de vértices que utilizaremos y el factor asociado (que dependerá del coupling y factores numéricos provenientes de simetrías).

Para definir el factor asociado a cada vértice analizaremos nuestro diagrama más fundamental: una sola interacción  $\phi^4$ , que es lo mismo, un solo vértice. En (1) tenemos una interacción  $\phi^4$ , por lo que este diagrama fundamental es



que tendría un factor dado por

$$-i \frac{\lambda_0}{4!} \times (\# \text{ permutaciones que lo dejm igual})$$

En este caso tenemos 4 patas que podemos ordenar de  $4!$  formas, nos queda el mismo diagrama. Así que el factor asociado a **cada vértice** es

$$-i \frac{\lambda_0}{4!} \times 4! = -i\lambda_0$$

Las reglas de Feynman para calcular amplitudes  $i\mathcal{T}$  sería:

- 1) Dibujar las líneas externas correspondientes a cada partícula entrante y saliente
- 2) Dejar uno de los extremos libres de las líneas externas y el otro extremo unirlo a un vértice donde se junten, en total, **cuatro líneas**. Normalmente hay que también agregar líneas internas. Siguiendo esto, dibujar todos los diagramas (a orden de vértices deseado) que sean **topológicamente inequivalentes**.
- 3) Para partículas entrantes dibujar una flecha encima de su línea apuntando hacia el vértice. Para partículas salientes flechas saliendo y para líneas internas es arbitrario
- 4) A cada línea asignarle su 4-momentum.

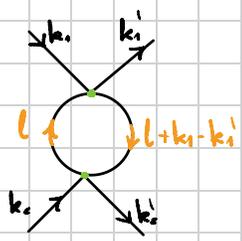
- 5) Definir el momentum de las líneas internas + q. en cada vértice se conserve el momentum
- 6) El valor matemático de cada diagrama se formará a partir de asignar:
  - para cada línea externa, 1
  - para cada línea interna con momentum q,  $-i/(q^2 + m^2 - i\epsilon)$
  - para cada vértice,  $-i\lambda$ .
- 7) De tener loops cerrados, hay que integrar el momentum interno que no queda fijado por 5)
- 8) Dividir por los factores de simetría, que consisten en la cantidad de veces que se pueden permutar líneas o vértices **internos** (manteniendo los líneas externas **fijos** y **sin contar** el diagrama) + q el diagrama sea el mismo
- 9) Incluir diagramas con un vértice de contra término, que consiste en un vértice que une 2 propagadores (ambos con el mismo momentum). El factor asociado a este vértice es  $-i(Ak^2 + Bm^2)$  con  $Z_p = 1 + A$  y  $Z_m = 1 + B$ .

b) Tenemos 2 partículas entrantes (de momentum  $k_1$  y  $k_2$ ) y 2 salientes ( $k'_1$  y  $k'_2$ ), entonces

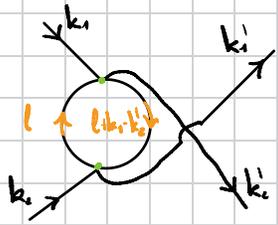
$$\begin{aligned}
 iT &= \text{Diagrama con un círculo etiquetado "Interacciones"} \\
 &= \text{Diagrama de cruce} \quad \left. \vphantom{\text{Diagrama de cruce}} \right\} \mathcal{O}(\lambda) \\
 &+ \text{Diagrama con un loop} + \text{Diagrama con un loop y un vértice de contra término} + \text{Diagrama con un loop y un vértice de contra término} \quad \left. \vphantom{\text{Diagrama con un loop}} \right\} \mathcal{O}(\lambda^2) \\
 &+ \mathcal{O}(\lambda^3)
 \end{aligned}$$

Seguendo las reglas, el primer diagrama sería simplemente  $-i\lambda$ . Para los  $\mathcal{O}(\lambda^2)$

$$\begin{aligned}
 &\text{Diagrama con un loop} \\
 &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{i} \frac{1}{(l - (k_1 + k_2))^2 + m^2 - i\epsilon} = D_2^2
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} (-i\lambda_0)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-i}{l^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{-i}{(l+k_1-k_1')^2 + m^2 - i\epsilon} \equiv D_2^{\text{tr}}$$



$$= \frac{1}{2} (-i\lambda_0)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-i}{l^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{-i}{(l+k_1-k_1')^2 + m^2 - i\epsilon} \equiv D_3^{\text{tr}}$$

donde el factor  $1/2$  viene de que podemos permutar los dos líneas internas que forman el loop.

$$\therefore iT = -i\lambda_0 + D_1^{\text{tr}} + D_2^{\text{tr}} + D_3^{\text{tr}} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

# P2

Consideraremos la teoría cúbica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_\varphi (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m m^2 \varphi^2 + \frac{g}{3!} \mathcal{L}_g \varphi^3$$

que debe ser rescrita como  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ , donde

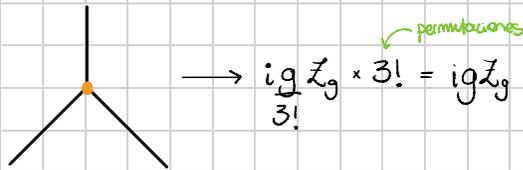
$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{g}{3!} \mathcal{L}_g \varphi^3 + \mathcal{L}_{ct}$$

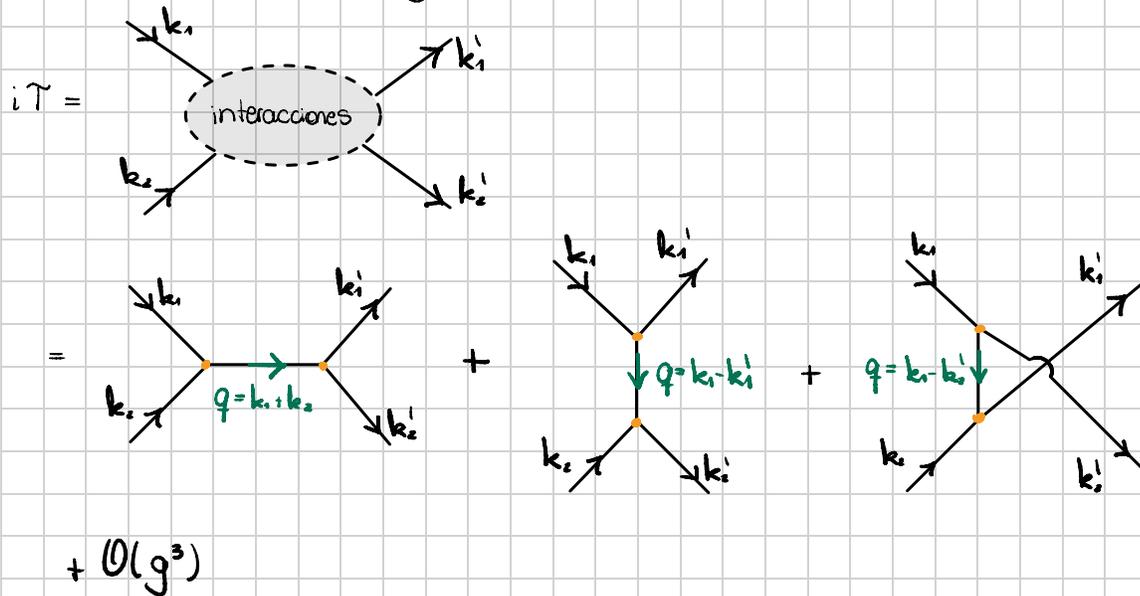
$$\mathcal{L}_{ct} = -\frac{1}{2} A (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} B m^2 \varphi^2$$

donde  $\mathcal{L}_\varphi = 1+A$  y  $\mathcal{L}_m = 1+B$  con  $A$  y  $B$  al menos  $\mathcal{O}(g)$ .

a) Las reglas de Feynman son exactamente las mismas, solo que ahora los vértices unen solo 3 líneas y el factor asociado a cada vértice es



b) Queremos 2 partículas entrantes y 2 salientes, entonces



Calculamos el valor de cada uno

$$= (ig \mathcal{L}_g)^2 \frac{-i}{(k_1 + k_2)^2 + m^2 - i\epsilon} \equiv D_i^j \quad (\text{no hay integral de loops})$$

$$= (igZ_0)^2 \frac{-i}{(k_1 - k_2)^2 + m^2 - i\epsilon} \equiv D_1^{\sigma^*}$$

$$= (igZ_0)^2 \frac{-i}{(k_1 - k_2')^2 + m^2 - i\epsilon} \equiv D_3^{\sigma^*}$$

Entonces,  $i\mathcal{T} = D_1^{\sigma^*} + D_2^{\sigma^*} + D_3^{\sigma^*} + \mathcal{O}(g^3)$

c) Como  $\hbar = c = 1$  todo tiene unidades de potencias de masa

$$[m] = 1, \quad [x^\mu] = -1, \quad [\partial^\mu] = +1, \quad [d^\mu x] = -d$$

Sabemos que  $[S] = 0$ , entonces  $[\mathcal{L}] = d$ . Por lo tanto,  $[m^2 \varphi^2] = d \Rightarrow [\varphi] = (d-2)/2$ , así que

$$[g \varphi^3] = [g] + [\varphi^3] = [g] + 3(d-2)/2 \stackrel{!}{=} d$$

$$\Rightarrow [g] = \frac{1}{2}(6-d)$$

así que  $g$  es adimensional si  $d = 6$ . Como se solicita, consideraremos que  $d = 6 - \epsilon$ , entonces

$$[g] = \epsilon/2$$

pero podemos pasar esta dependencia de dimensiones a un factor de masa que introducimos:  $\tilde{\mu}$ . Así que hacemos el cambio

$$g \rightarrow g \tilde{\mu}^{\epsilon/2}$$

f.q. este nuevo  $g$  es adimensional  $\forall \epsilon$ .

d) La self-energy  $\Pi(k')$  se define como

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \Delta(k') &= \frac{1}{i} \Delta(k') + \frac{1}{i} \Delta(k') [i\Pi(k')] \frac{1}{i} \Delta(k') + \dots \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{k'^2 + m^2 - i\epsilon - \Pi(k')} \end{aligned}$$

que diagramáticamente es la suma de todos los diagramas 1PI con "dos líneas externas amputadas".

Por ejemplo,

$$\frac{1}{i} \Delta(k^2) = \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{i} \Delta(k^2)} \right\} \mathcal{O}(g^0)$$

$$+ \left[ \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \right] \left. \vphantom{+} \right\} \mathcal{O}(g^1)$$

$$+ \left[ \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \right] \left. \vphantom{+} \right\} \mathcal{O}(g^1)$$

+  $\mathcal{O}(g^0)$

Solo nos preocuparemos de  $\mathcal{O}(g^2)$ . Siguiendo las reglas y cortando los propagadores externos

$$i\Pi(k^2) = \frac{1}{2} (ig\tilde{\mu}^{d/2}Z_g)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-i}{l^2+m^2-ie} \frac{-i}{(l-k)^2+m^2-ie} \underbrace{-i(Ak^4+Bm^4)}_{\text{viene de las reglas también}} + \mathcal{O}(g^1)$$

Calcularemos la integral de loop con fórmula de Feynman. Ocuparemos que

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int dF_n(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^{-n}$$

donde  $dF_n = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n - 1)$ , + q.  $\int dF_n \cdot 1 = 1$

En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(l^2+m^2)(l-k)^2+m^2} &= 1! \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1+x_2-1) (x_1(l^2+m^2) + x_2((l-k)^2+m^2))^{-2} \\ &= \int_0^1 dx [x((l-k)^2+m^2) + (1-x)(l^2+m^2)]^{-2} \\ &= \int_0^1 dx [l^2 - 2x l \cdot k + x k^2 + m^2]^{-2} \\ &= \int_0^1 dx [(l-xk)^2 + x(1-x)k^2 + m^2]^{-2} \\ &= \int_0^1 dx [q^2 + D]^{-2}, \text{ con } q \equiv l-xk \quad \wedge \quad D \equiv x(1-x)k^2 + m^2 \end{aligned}$$

omitiré por un momento ie ↗

donde definiremos  $q$  y  $D$  + q.  $q$  contenga toda la dependencia en  $l$  (la variable de integración)

Ahora, la integral que queremos es

$$i I(k^*) = \int_{(2\pi)^d} \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(\ell^*) \tilde{\Delta}((\ell-k)^*) = \int_{\cdot} d^d q \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + D^*]^2}$$

y para eliminar realmente el  $i$  deberemos pasar al euclideo, o sea, hacer

$$q \rightarrow \bar{q} \Rightarrow d^d q \rightarrow i d^d \bar{q}$$

$$\Rightarrow i I(k^*) = i \int_{\cdot} d^d x \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\bar{q}^2 + D^*]^2}$$

Ocuparemos la fórmula

$$\int_{(2\pi)^d} \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^*)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b-a-d/2) \Gamma(a+d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(b) \Gamma(d/2)} D^{-(b-a-d/2)}$$

que en nuestro caso

$$d = 6 - \epsilon, \quad a = 0, \quad b = 2$$

$$\Rightarrow I(k^*) = \frac{\Gamma(-1+\epsilon/2)}{(4\pi)^3} \int_{\cdot} d^d x D \left( \frac{4\pi}{D} \right)^{\epsilon/2}$$

Reemplazando en  $\Pi(k^*)$  y nombrando  $\alpha \equiv g^2/(4\pi)^3$  (y tomando  $Z_g = 1$ )

$$\Rightarrow \Pi(k^*) = \frac{1}{2} \alpha \Gamma(-1+\epsilon/2) \int_{\cdot} d^d x D \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\epsilon/2} - (Ak^2 + Bm^2) + \mathcal{O}(g^4)$$

En este punto deberemos tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  +.q.  $d \rightarrow 6$  Usando Mathematica

$$\Pi(k^*) = -\frac{1}{2} \alpha \int_{\cdot} d^d x \left[ \underbrace{D \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right)}_{(1)} + D \left( -\gamma + \ln \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] - (Ak^2 + Bm^2) + \mathcal{O}(g^4)$$

Para (1) usamos que  $D = (x-x^i)^2 k^2 + m^2$

$$\Rightarrow \int_{\cdot} d^d x (x-x^i)^2 k^2 + m^2 = k^2 \frac{1}{6} + m^2$$

entonces 
$$\Pi(k^*) = -\frac{1}{2} \alpha \left[ \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) \left( \frac{1}{6} k^2 + m^2 \right) + \int_{\cdot} d^d x D \ln \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{e^\gamma D} \right) \right] - (Ak^2 + Bm^2) + \mathcal{O}(g^4)$$

y redefinimos  $\mu^2 \equiv 4\pi \tilde{\mu}^2 e^{-\gamma}$

$$\Rightarrow \Pi(k^*) = -\frac{1}{2} \alpha \left[ \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) \left( \frac{1}{6} k^2 + m^2 \right) + \int_{\cdot} d^d x D \left[ \ln \left( \frac{m^2}{D} \right) + 2 \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right] \right] - (Ak^2 + Bm^2) + \mathcal{O}(g^4)$$

$$= \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{m^2} \right)$$

$$- \left[ \frac{\alpha}{6} \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right) + A \right] k^2 - \left[ \frac{\alpha}{6} \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right) + B \right] m^2 + \mathcal{O}(g^4)$$

Para eliminar las divergencias  $\epsilon^{-1}$  y los parámetros introducidos a la fuerza,  $\mu$ , tomaremos

$$A = -\frac{\alpha}{6} \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right) - \frac{1}{6} \kappa_a \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$B = -\alpha \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right) - \kappa_b \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

De esta forma

$$\Rightarrow \Pi(k^2) = \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) + \alpha \left( \frac{1}{6} \kappa_a k^2 + \kappa_b m^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Dejamos vivos  $\kappa_a$  y  $\kappa_b$  + q. podamos imponer  $\Pi(-m^2) \stackrel{!}{=} 0$  y  $\Pi'(-m^2) \stackrel{!}{=} 0$ . Con Mathematica

$$\Pi(-m^2) = \frac{1}{36} \alpha m^2 (-19 + 3\sqrt{3}\pi) + \alpha m^2 \left( -\frac{1}{6} \kappa_a + \kappa_b \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \stackrel{!}{=} 0$$

y para  $\Pi'(k^2)$

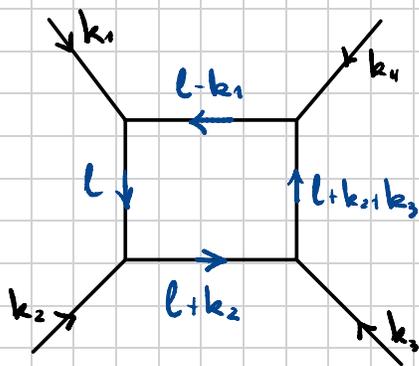
$$\Pi'(-m^2) = \frac{1}{2} \alpha \left( -\frac{7}{9} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{6} \alpha \kappa_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\therefore \kappa_a = \frac{1}{6} (14 - 3\sqrt{3}\pi) \quad \text{y} \quad \kappa_b = \frac{1}{12} (11 - 2\sqrt{3}\pi)$$

e) El orden más bajo de  $V_4$  es

$$i V_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \mathcal{O}(g^4)$$

Calcularemos solo el primero y el segundo estará dado por  $k_3 \leftrightarrow k_2$  y el tercero  $k_3 \leftrightarrow k_4$ . Usando reglas de Feynman amputando las patas externas



$$= (ig \tilde{\mu}^{e/2} Z_g)^4 \left(\frac{1}{i}\right)^4 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \hat{\Delta}(l^2) \hat{\Delta}((l+k_2)^2) \hat{\Delta}((l+k_2+k_3)^2) \hat{\Delta}((l-k_1)^2)$$

(que reescribimos con fórmula de Feynman)

$$\frac{1}{(l^2+m^2)((l+k_2)^2+m^2)((l+k_2+k_3)^2+m^2)((l-k_1)^2+m^2)} = 3! \int dx_1 \dots dx_4 \delta(x_1+\dots+x_4-1) \times [x_1(l^2+m^2) + x_2((l+k_2)^2+m^2) + x_3((l+k_2+k_3)^2+m^2) + x_4((l-k_1)^2+m^2)]^{-4}$$

blah blah... vean el Srednicki

Notarán que la integral de loop es convergente, por lo que al tomar  $\epsilon \rightarrow 0$  no conseguimos ninguna divergencia por lo que podemos olvidarnos de  $\epsilon$  y trabajar directamente con  $d=6$

\* Tenemos  $\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l^2 + a]^b} \Rightarrow$  converge para  $d < 2b$