Auxiliar 6

Contratérminos, propagadores y self-energy

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliar: Javier Huenupi

P1.-

Considere un oscilador anarmónico cuántico, dado por el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} Z \dot{q}^2 - \frac{1}{2} Z_\omega \omega^2 q^2 - Z_\lambda \lambda \omega^3 q^4, \tag{1}$$

donde hemos definido $\hbar = m = 1$, entonces λ no tiene dimensiones.

a) Encuentre el hamiltoniano H correspondiente a L. Escríbalo como $H = H_0 + H_1$, donde $H_0 = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2$, y use $[P, Q] = i$.

b) Defina $|0\rangle$ y $|1\rangle$ como el estado basal y el primer estado excitado de H_0. También defina $|\Omega\rangle$ y $|I\rangle$ como el estado basal y el primer estado excitado de H. Tome que todos estos estados tienen norma unitaria. Definimos ω como la primera excitación de energía de H, o sea $\omega \equiv E_I - E_\Omega$. Normalizamos la posición definiendo $\langle I| Q |\Omega\rangle = \langle 1| Q |0\rangle = (2\omega)^{-1/2}$. Finalmente, para simplificar la matemática usemos $Z_\lambda = 1$. Escriba $Z = 1 + A$ y $Z_\omega = 1 + B$, donde $A = \kappa_A \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$ y $B = \kappa_B \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Use la teoría de perturbaciones Rayleigh-Schrödinger para calcular las correcciones $\mathcal{O}(\lambda)$ a los autovalores y autovectores asociados a H_0.

c) Encuentre los valores numéricos de κ_A y κ_B que permiten que $\omega = E_I - E_\Omega$ y $\langle I| Q |\Omega\rangle = (2\omega)^{-1/2}$.

d) Ahora piense el lagrangiano (1) como una teoría cuántica de campos en $d = 1$. En otras palabras, considere en una primera instancia la teoría

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} Z_\lambda \lambda \varphi^4$$

en d-dimensiones arbitrarias, para luego hacer los cambios

$$d \to 1, \quad m^2 \to \omega^2, \quad \lambda \to 4!\lambda\omega^3, \quad Z_\varphi \to Z, \quad Z_m \to Z_\omega,$$

con tal de recuperar la forma de (1).

Con esto, calcule la corrección $\mathcal{O}(\lambda)$ al propagador. Fije κ_A y κ_B requiriendo que el propagador tenga polos de residuo 1 en $k^2 = -\omega^2$. ¿Estos resultados concuerdan con los del ítem anterior? ¿Deben hacerlo?

Auxiliar 6

P1

Consideraremos la teoría 1D

$$L = \frac{1}{2} Z \dot{q}^2 - \frac{1}{2} Z_\omega \omega^2 q^2 - Z_\lambda \lambda \omega^3 q^4$$

a) Sabemos que el hamiltoniano se relaciona con L según

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

donde

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = Z \dot{q}$$

así que

$$H = \frac{p^2}{Z} - \frac{1}{2Z} p^2 + \frac{1}{2} Z_\omega \omega^2 q^2 + Z_\lambda \lambda \omega^3 q^4$$

$$= \frac{1}{2} Z^{-1} p^2 + \frac{1}{2} Z_\omega \omega^2 q^2 + Z_\lambda \lambda \omega^3 q^4$$

A su vez, este hamiltoniano se puede escribir como una teoría libre + interacciones y contratérminos

$$H = H_0 + H_1$$

$$= \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + \frac{1}{2}(Z^{-1} - 1) p^2 + \frac{1}{2}(Z_\omega - 1)\omega^2 q^2 + Z_\lambda \lambda \omega^3 q^4$$

Ahora, escribamos p y q en función de operadores escalera. Como en QM estándar:

$$q = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}\,(a^\dagger + a) \qquad y \qquad p = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,(a^\dagger - a)$$

donde, a partir de $[p, q] = i$, podemos demostrar $[a, a^\dagger] = 1$. También, reemplacemos de inmediato $Z = 1 + \kappa_A \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \Rightarrow Z^{-1} = 1 - \kappa_A \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$, $Z_\omega = 1 + \kappa_B \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$, $Z_\lambda = 1$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{1}{2} \kappa_A \lambda \frac{\omega}{2} (a^\dagger - a)^2 + \frac{1}{2} \kappa_B \lambda \frac{\omega}{2} (a^\dagger + a)^2 + \lambda \frac{\omega}{4} (a^\dagger + a)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$= \frac{1}{4} \lambda \omega \left[\kappa_A (a^\dagger - a)^2 + \kappa_B (a^\dagger + a)^2 + (a^\dagger + a)^4 \right] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Mientras que la teoría libre es simplemente $H_0 = \omega(a^\dagger a + 1/2)$

b) Queremos calcular las correcciones a primer orden de la energía libre $E_{0,n}$, dada por

$$E_{0,n} \equiv {}_0\langle n|\hat{H}_0|n\rangle_0 = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

y la corrección a los autoestados $|n\rangle_0$, los cuales siguen

$$a^\dagger|n\rangle_0 = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle_0, \quad a|n\rangle_0 = \sqrt{n}\,|n-1\rangle_0, \quad a|0\rangle_0 = 0.$$

Como H es independiente del tiempo, por Rayleigh-Schrödinger sabemos que

$$E_n = E_{0,n} + {}_0\langle n|\hat{H}_1|n\rangle_0 + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (1)$$

me equivoqué de signo

$$|n\rangle = |n\rangle_0 - \sum_{k\neq n} \frac{{}_0\langle k|\hat{H}_1|n\rangle_0\, |k\rangle_0}{E_{0,n}-E_{0,k}} \quad (2)$$

De (1) y (2) sabemos que hay que sandwichear $\hat{H}_1$. Término por término

▷ $${}_0\langle k|(a^\dagger-a)^2|n\rangle_0 = {}_0\langle k|a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a - aa^\dagger + aa|n\rangle_0$$
$$= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\delta_{k,n+2} - (2n+1)\delta_{k,n} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\delta_{k,n-2}$$

▷ $${}_0\langle k|(a^\dagger+a)^2|n\rangle_0 = {}_0\langle k|a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + aa^\dagger + a^2|n\rangle_0$$
$$= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\delta_{k,n+2} + (2n+1)\delta_{k,n} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\delta_{k,n-2}$$

▷ $${}_0\langle k|(a^\dagger+a)^4|n\rangle_0 = {}_0\langle k|(a^{\dagger 4} + a^{\dagger 3}a + a^{\dagger 2}aa^\dagger) + (a^{\dagger 2}a^2 + a^\dagger a a^{\dagger 2} + a^\dagger a a^\dagger a + a^\dagger a^2 a^\dagger + a^\dagger a^3)$$
$$+ (aa^{\dagger 3} + aa^{\dagger 2}a + aa^\dagger a a^\dagger + aa^\dagger a^2) + (a^2 a^{\dagger 2} + a^2 a^\dagger a + a^3 a^\dagger + a^4)|n\rangle_0$$
$$= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}\sqrt{n+4}\,\delta_{k,n+4} + (4n+6)\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\delta_{k,n+2}$$
$$+ (6n^2+6n+3)\delta_{k,n} + (4n-2)\sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\delta_{k,n-2} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}\sqrt{n-3}\,\delta_{k,n-4}$$

Para el caso de la auto-energía $k=n$

$${}_0\langle n|\hat{H}_1|n\rangle_0 = \frac{1}{4}\lambda\omega\left[-\kappa_A(2n+1) + \kappa_B(2n+1) + (6n^2+6n+3)\right]$$

e identificamos $E_{\mathrm{II}} = E_0$ y $E_{\mathrm{I}} = E_1$, por lo tanto

- $E_{\mathrm{II}} = \dfrac{\omega}{2} + \dfrac{1}{4}\lambda\omega\left[-\kappa_A + \kappa_B + 3\right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (3)$
- $E_{\mathrm{I}} = \dfrac{3\omega}{2} + \dfrac{1}{4}\lambda\omega\left[-3\kappa_A + 3\kappa_B + 15\right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (4)$

Mientras que para los auto-estados tenemos

$$-\sum_{k\neq n} \frac{{}_0\langle k|\hat H_1|n\rangle_0}{E_{0n}-E_{0k}}|k\rangle_0 = -\frac{1}{4}\lambda\omega \Bigg[\kappa_A\left(\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{E_{0,n}-E_{0,n+2}}|n+2\rangle_0 + \frac{\sqrt{n(n-1)}}{E_{0,n}-E_{0,n-2}}|n-2\rangle_0\right)$$

$$+\kappa_B\left(\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{E_{0,n}-E_{0,n+2}}|n+2\rangle_0 + \frac{\sqrt{n(n-1)}}{E_{0,n}-E_{0,n-2}}|n-2\rangle_0\right)$$

$$+\frac{\sqrt{(n+1)\cdots(n+4)}}{E_{0,n}-E_{0,n+4}}|n+4\rangle_0 + \frac{(4n+6)\sqrt{(n+1)(n+2)}}{E_{0,n}-E_{0,n+2}}|n+2\rangle_0$$

$$+\frac{(4n-2)\sqrt{n(n-1)}}{E_{0,n}-E_{0,n-2}}|n-2\rangle_0 + \frac{\sqrt{n\cdots(n-3)}}{E_{0,n}-E_{0,n-4}}|n-4\rangle_0\Bigg]$$

Así que para los estados $|\Omega\rangle$, $n=0$, y $|I\rangle$, $n=1$, tenemos ★ $E_{0,n}-E_{0,n+a}=-\omega a$

- $$|\Omega\rangle = |0\rangle_0 + \frac{1}{4}\lambda\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\kappa_A+\kappa_B)|2\rangle_0 + \frac{\sqrt{6}}{2}|4\rangle_0 + 3\sqrt{2}\,|2\rangle_0\right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (5)$$

- $$|I\rangle = |1\rangle_0 + \frac{1}{4}\lambda\left[\frac{\sqrt{6}}{2}(\kappa_A+\kappa_B)|3\rangle_0 + \frac{\sqrt{30}}{2}|5\rangle_0 + 5\sqrt{6}\,|3\rangle_0\right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (6)$$

c) Tenemos 2 condiciones que cumplir:

$$\omega = E_I - E_\Omega \quad (7)$$

$$\langle I|q|\Omega\rangle = (2\omega)^{-1/2} \quad (8)$$

que de (3) y (4) notamos que no se cumple a priori. Para que se cumplan debemos encontrar valores específicos de κ_A y κ_B.

Empecemos imponiendo (7) con (3) y (4)

$$\omega \overset{!}{=} E_I - E_\Omega = \omega + \frac{1}{4}\lambda\omega[-2\kappa_A + 2\kappa_B + 12] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

de donde obtenemos que $-\kappa_A+\kappa_B+6 \overset{!}{=} 0$ (9). Ahora, de (8) y usando $|I\rangle$ y $|\Omega\rangle$ encontrados

$$(2\omega)^{-1/2} \overset{!}{=} (2\omega)^{-1/2}\langle I|(a^\dagger+a)|\Omega\rangle$$

$$= (2\omega)^{-1/2}\Bigg[{}_0\langle 1|(a^\dagger+a)|0\rangle_0 + \frac{1}{4}\lambda\Bigg(\frac{\sqrt{6}}{2}(\kappa_A+\kappa_B)\cancel{{}_0\langle 3|(a^\dagger+a)|0\rangle_0} + \frac{\sqrt{30}}{2}\cancel{{}_0\langle 5|(a^\dagger+a)|0\rangle_0} + 5\sqrt{6}\,\cancel{{}_0\langle 3|(a^\dagger+a)|0\rangle_0}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}(\kappa_A+\kappa_B)\,{}_0\langle 1|(a^\dagger+a)|2\rangle_0 + \frac{\sqrt{6}}{2}\cancel{{}_0\langle 1|(a^\dagger+a)|4\rangle_0} + 3\sqrt{2}\,{}_0\langle 1|(a^\dagger+a)|2\rangle_0\Bigg)\Bigg] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$= (2\omega)^{-1/2}\left[1 + \frac{1}{4}\lambda(\kappa_A+\kappa_B+6)\right] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

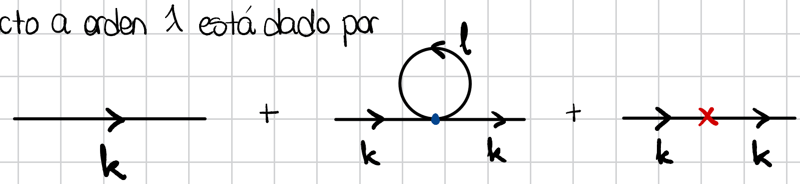
donde imponemos $K_A + K_B + 6 \stackrel{!}{=} 0$ (10). Por lo tanto, de (9) y (10)

$$\boxed{K_A \stackrel{!}{=} 0} \quad \wedge \quad \boxed{K_B \stackrel{!}{=} -6}$$

d) Ahora, consideremos la teoría de campos cuánticos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} Z_\lambda \lambda \varphi^4$$

cuyo propagador exacto a orden λ está dado por

$\Delta(k^2) =$  $+ \mathcal{O}(\lambda^2)$

Como tenemos loops utilizaremos dim-reg trabajando en d dimensiones y escrito como

$$d = 4 - \epsilon$$

con ϵ, a priori, arbitrario. Además, queremos trabajar con un coupling sin dimensiones, pero sabemos que

$$[\mathcal{L}] = d \quad \Rightarrow [\lambda] = d - 4 = \epsilon$$

entonces hacemos el cambio $\lambda \to \lambda \tilde{\mu}^\epsilon$, t.q. ahora λ es adimensional. Además, escribamos

$$Z_\varphi = 1 + A, \qquad Z_m = 1 + B, \qquad Z_\lambda = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Reescribiríamos la teoría como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ donde

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4!} \lambda \tilde{\mu}^\epsilon \varphi^4 + \mathcal{L}_{ct}$$

$$\mathcal{L}_{ct} = -\frac{1}{2} A (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} B m^2 \varphi^2$$

y siguiendo las reglas de Feynman, la self-energy (considerando los contratérminos) sería

$$i\Pi(k^2) = \overbrace{\frac{1}{2}(-i\lambda\tilde{\mu}^\epsilon) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \Delta(l^2)} \overbrace{- i(Ak^2 + Bm^2)} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

donde usamos el hecho que cada vértice • tiene asociado un factor $(-i\lambda\tilde{\mu}^\epsilon)$ y el 1/2 viene del loop. Además, como en todas las teorías, el vértice-contratérmino × tiene asociado un factor $-i(Ak^2 + Bm^2)$.

Ahora, deberíamos calcular la contribución del loop

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)} \frac{1}{l^2 + m^2}$$

que es claramente divergente para $d \geq 2$, ya que integramos en todo el rango de momentum. La introducción de ϵ nos permitiría cuantificar concretamente esta divergencia, que luego eliminaríamos definiendo A y B inteligentemente.

Sin embargo, nos piden trabajar en 1-dimensión, por lo que no hay divergencia del loop y podemos olvidarnos de introducir el ϵ (y el término de masa $\tilde{\mu}$). Así que tomando esto en cuenta, y escribiendo $A = \kappa_A \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$ y $B = \kappa_B \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$, además de hacer los cambios $m \to \omega$ y $\lambda \to 4!\,\lambda\omega^3$ para recuperar la forma del oscilador anarmónico, estaríamos trabajando con:

$$i\Pi(k^2) = \frac{1}{2}(-i\,4!\,\lambda\omega^3)\int \frac{dl}{2\pi}\,\frac{1}{l^2+\omega^2} - i\lambda(\kappa_A k^2 + \kappa_B \omega^2) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

donde la integral es simplemente

$$\int \frac{dl}{2\pi}\,\frac{1}{l^2+\omega^2} = \frac{1}{2\omega}$$

entonces

$$i\Pi(k^2) = -i\lambda\left[6\omega^2 + \kappa_A k^2 + \kappa_B \omega^2\right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (11)$$

Ahora, para imponer que el propagador exacto tenga residuo 1 en $k^2 = -m^2 = -\omega^2$ se tiene que cumplir

- $\Pi(-\omega^2) \overset{!}{=} 0 \quad (12)$
- $\Pi'(-\omega^2) \overset{!}{=} 0 \quad (13)$

De (11) notamos que para cumplir (12) se requiere

$$6\omega^2 + \omega_A k^2 + \kappa_B \omega^2 \overset{!}{=} 0$$

mientras que de (13), donde $\Pi'(k^2) \equiv d\Pi(k^2)/d(k^2)$, tenemos

$$\kappa_A \overset{!}{=} 0$$

lo que implica que $\kappa_B \overset{!}{=} -6$. Que es lo mismo que ya habíamos obtenido.