

Auxiliar 6

Dinámica

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi

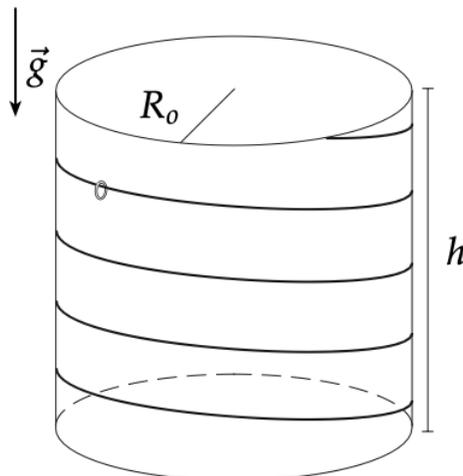
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.- Fuerza normal no trivial

Un anillo de masa m desciende, debido a su propio peso, por un alambre de forma helicoidal de radio R_0 y paso tal que $z = h - \theta R_1$. No hay roce anillo-alambre, pero si hay un roce viscoso: el anillo es frenado por un roce viscoso lineal $\vec{F} = -c\vec{v}$.

La condición inicial es $\theta(0) = 0$, $z(0) = h$ y $\dot{\theta}(0) = 0$ y la aceleración de gravedad es g .

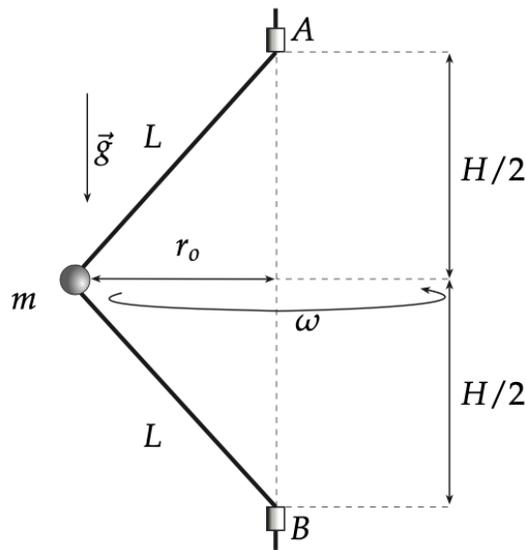
- Obtenga el vector unitario tangente \hat{t} de la trayectoria y con este encuentre la expresión más general posible para la fuerza normal \vec{N} de este problema.
- Descomponga la ecuación (vectorial) de movimiento en ecuaciones escalares (lo usual).
- De las ecuaciones anteriores obtenga la forma explícita de $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ en función de los datos: m , R_0 , R_1 , c y g .



P2.-

Una partícula de masa m está atada a 2 cuerdas independientes de igual largo L , cuyos otros extremos están fijados a los puntos A y B , separados entre sí una distancia H (ver Figura). La partícula rota en torno al eje vertical AB , manteniéndose en el plano horizontal ubicado a media distancia entre ambos puntos.

- Determine el mínimo valor de la velocidad angular ω que le permite a la partícula mantener un movimiento circular uniforme con ambas cuerdas tensas (Datos: m , g , H).
- Si ambas cuerdas son recogidas a una tasa igual y constante, $\dot{L} = -v_0$, muestre que $\ddot{r} \propto r^{-3}$. Obtenga la constante de proporcionalidad de esta relación.



Formulario

Fuerza normal

Por definición, la fuerza normal \vec{N} es **siempre es perpendicular/normal** a la superficie, o que es lo mismo, perpendicular a la **trayectoria** de la partícula.

El vector unitario **tangente** a la trayectoria de una partícula se calcula como

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},$$

por lo que, por definición de la normal, se tiene la relación $\hat{t} \cdot \vec{N} = 0$. Esta relación solo se ocupa cuando la partícula sigue una trayectoria no trivial.

Auxiliar 6

P1

a) Debido a que trabajamos en un cilindro (y nos dan una expresión de z en función de θ), usamos coord. cilíndricas.

Para este problema es importante recordar que la normal es perpendicular a la superficie/trayectoria por la que se mueve la masa, por lo que necesitamos calcular el vector tangente a la trayectoria, ya que así podemos imponer que $\vec{N} \cdot \hat{t} = 0$ (perpendiculares).

Usamos la fórmula

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

donde la velocidad en cilíndricas, con $\dot{r} = \dot{p} = 0$, $p = R_0$ y $z = h - \theta R_1 \Rightarrow \dot{z} = -\dot{\theta} R_1$, es

$$\vec{v} = \dot{p}\hat{p} + p\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} = R_0\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}R_1\hat{k} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{R_0^2\dot{\theta}^2 + R_1^2\dot{\theta}^2} = \dot{\theta}\sqrt{R_0^2 + R_1^2}$$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{R_0\dot{\theta}\hat{\theta} - R_1\dot{\theta}\hat{k}}{\dot{\theta}\sqrt{R_0^2 + R_1^2}} = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}}\hat{\theta} - \frac{R_1}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}}\hat{k}$$

Ahora, la forma más general de la normal es asumiendo que tiene componentes en los 3 ejes, o sea

$$\vec{N} = N_p\hat{p} + N_\theta\hat{\theta} + N_z\hat{k}, \text{ imponemos } \vec{N} \cdot \hat{t} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{N} \cdot \hat{t} = \frac{N_\theta R_0}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}} - \frac{N_z R_1}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow N_\theta = N_z \frac{R_1}{R_0}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = N_p\hat{p} + \frac{R_1}{R_0} N_z\hat{\theta} + N_z\hat{k}$$

b) Ahora, hacemos dinámica, donde las fuerzas son: el peso ($-mg\hat{k}$), la normal (\vec{N}) y el roce

$$m(\ddot{p} - p\dot{\theta}^2)\hat{p} + (2\dot{p}\dot{\theta} + p\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k} = -mg\hat{k} + N_p\hat{p} + \frac{R_1}{R_0} N_z\hat{\theta} + N_z\hat{k} - c(\dot{p}\hat{p} + p\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k})$$

$$\Rightarrow m(-R_0\dot{\theta}^2\hat{p} + R_0\ddot{\theta}\hat{\theta} - \ddot{\theta}R_1\hat{k}) = -mg\hat{k} + N_p\hat{p} + \frac{R_1}{R_0} N_z\hat{\theta} + N_z\hat{k} - c(R_0\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}R_1\hat{k})$$

Con lo que las ecs. escalares son:

$$\hat{p}) -mR_0\dot{\theta}^2 = N_p$$

$$\hat{\theta}) mR_0\ddot{\theta} = \frac{R_1}{R_0} N_z - cR_0\dot{\theta}$$

$$\hat{k}) -mR_1\ddot{\theta} = -mg + N_z + cR_1\dot{\theta}$$

c) Notamos que en $\hat{\theta}$ y \hat{k} tenemos N_z que no conocemos, por lo que despejamos esta componente e igualamos

$$\Rightarrow \frac{R_0}{R_1} (mR_0\ddot{\theta} + cR_0\dot{\theta}) = -mR_1\ddot{\theta} + mg - cR_1\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} \left(\frac{mR_0^2}{R_1} + mR_1 \right) = - \left(\dot{\theta} - mg \left(\frac{cR_0^2}{R_1} + cR_1 \right)^{-1} \right) \left(\frac{cR_0^2}{R_1} + cR_1 \right)$$

reordenamiento para hacer el C.V

que podemos resolver con polinomio característico o a lo mecánica. Hagamos el c.v.

$$\dot{z} = \dot{\theta} - \frac{mg R_1}{c} \frac{1}{(R_0^2 + R_1^2)} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} \frac{m}{R_1} (R_0^2 + R_1^2) = -\dot{z} \frac{c}{R_1} (R_0^2 + R_1^2)$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{z} = -c \dot{z}$$

$$\Rightarrow m \int_{z_0}^z \frac{dz}{z} = -c \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow m \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = -ct$$

$$\Leftrightarrow \dot{z}(t) = z_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

donde como $\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \dot{z}(0) = -\frac{mg R_1}{c} \frac{1}{R_0^2 + R_1^2}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) - \frac{mg R_1}{c} \frac{1}{R_0^2 + R_1^2} = -\frac{mg R_1}{c} \frac{1}{R_0^2 + R_1^2} e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{mg R_1}{c} \frac{1}{R_0^2 + R_1^2} (1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

Donde notamos que sin importar el roce, la partícula nunca deja de girar ni bajar, pero alcanza una velocidad angular máxima de $\frac{mg R_1}{c(R_0^2 + R_1^2)}$

P2

Hacemos algo similar al anterior, descomponemos las tensiones \vec{T}_1 y \vec{T}_2 en \hat{p} y \hat{k}

La dinámica es:

$$m((\dot{p} - p\dot{\theta}^2)\hat{p} + \frac{1}{p} \frac{d}{dt}(p^2\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}) = -mg\hat{k} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$= -mg\hat{k} + (T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha)\hat{k} - (T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha)\hat{p}$$

Imponiendo un mov. circ. unif. $\Rightarrow \dot{p} = \ddot{p} = 0, \ddot{z} = 0$. Las ecs. escalares quedan:

$$\hat{p}) -mr_o\dot{\theta}^2 = -(T_1 + T_2)\cos\alpha$$

$$\hat{\theta}) \frac{1}{p} \frac{d}{dt}(p^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\hat{k}) 0 = -mg + (T_1 - T_2)\sin\alpha$$

y la condición para que las cuerdas se mantengan tensas es que $T_1, T_2 > 0$. Juntamos \hat{p} y \hat{k}

$$T_2 = \frac{mr_o\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} - T_1 = \frac{mr_o\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} - \frac{mg}{\sin\alpha} - T_2$$

$$\Leftrightarrow 2T_2 = \frac{mr_o\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} - \frac{mg}{\sin\alpha} > 0$$

$$\Rightarrow r_o\dot{\theta}^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - g > 0$$

donde por geometría $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{H}{2r_o} \Rightarrow r_o\dot{\theta}^2 \frac{H}{2r_o} - g > 0 \Rightarrow \dot{\theta} > \sqrt{\frac{2g}{H}}$

b) Describamos r con pitágoras

$$r^2 + \frac{H^2}{4} = L^2 \Rightarrow r^2 = L^2 - \frac{H^2}{4} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow 2r\dot{r} = 2L\dot{L}$$

$$= -2Lv_o$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -\frac{v_o L}{r} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -v_o \left(\frac{\dot{L}r - L\dot{r}}{r^2} \right)$$

$$= -v_o \left(-\frac{v_o}{r} + \frac{L}{r^2} \frac{v_o L}{r} \right)$$

$$= \frac{v_o^2}{r} \left(1 - \frac{L^2}{r^2} \right)$$

$$= \frac{v_o^2}{r} \left(\frac{r^2 - L^2}{r^2} \right) = \frac{v_o^2}{r^3} \cdot \frac{-H^2}{4}$$

o. La cte. es $-v_o^2 H^2 / 4$