Auxiliar 5

Fuerzas centrales y torque-momentum angular

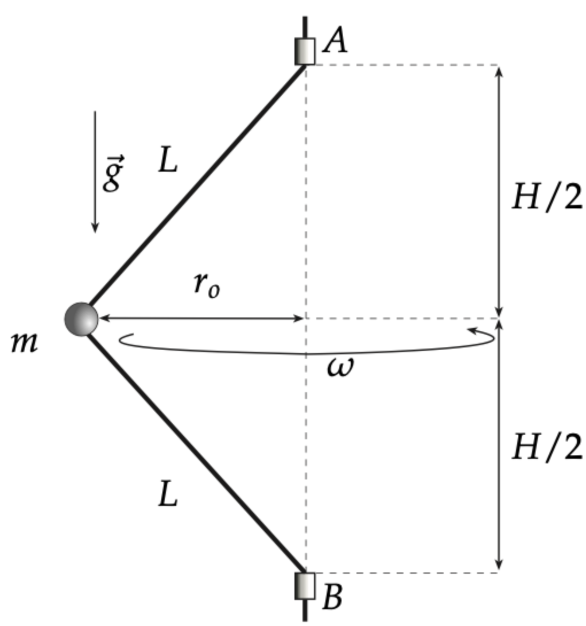
Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Javier Huenupi, Clemente Miranda
Ayudantes: Catalina Cerna, Giulianna Pesce

P1.-

Una partícula de masa m está atada a 2 cuerdas independientes de igual largo L, cuyos otros extremos están fijos a los puntos A y B, separados entre sí una distancia H (ver Figura). La partícula rota en torno al eje vertical AB, manteniéndose en el plano horizontal ubicado a media distancia entre ambos puntos.

a) Determine el mínimo valor de la velocidad angular ω que le permite a la partícula mantener un movimiento circular uniforme con ambas cuerdas tensas (Datos: m, g, H).

b) Si ambas cuerdas son recogidas a una tasa igual y constante, $\dot{L} = -v_0$, muestre que $\ddot{\rho} \propto \rho^{-3}$. Obtenga la constante de proporcionalidad de esta relación.

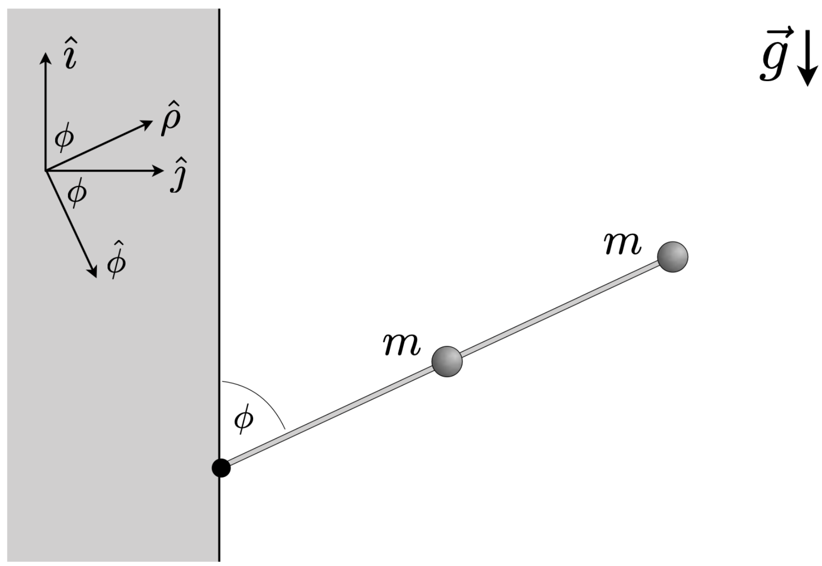


P2.-

Consideremos dos masas m unidas a una varilla rígida sin masa de largo $2D$, tal como indica en la Figura, con ambas masas separadas por una distancia D. La varilla de masa despreciable puede rotar libremente con respecto a una rótula fija a la pared.

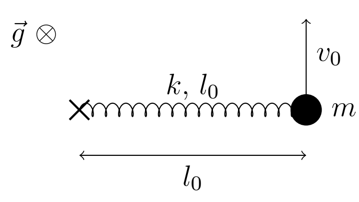
a) Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ

b) [**Propuesto**] Encuentre la expresión de la fuerza que ejerce el pivote sobre la barra $\vec{F}_{\text{piv}}$, en función del ángulo ϕ y constantes del problema



P3.- Propuesto

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural. Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$.



Hint: Con las condiciones iniciales ocupar conservación del momentum angular

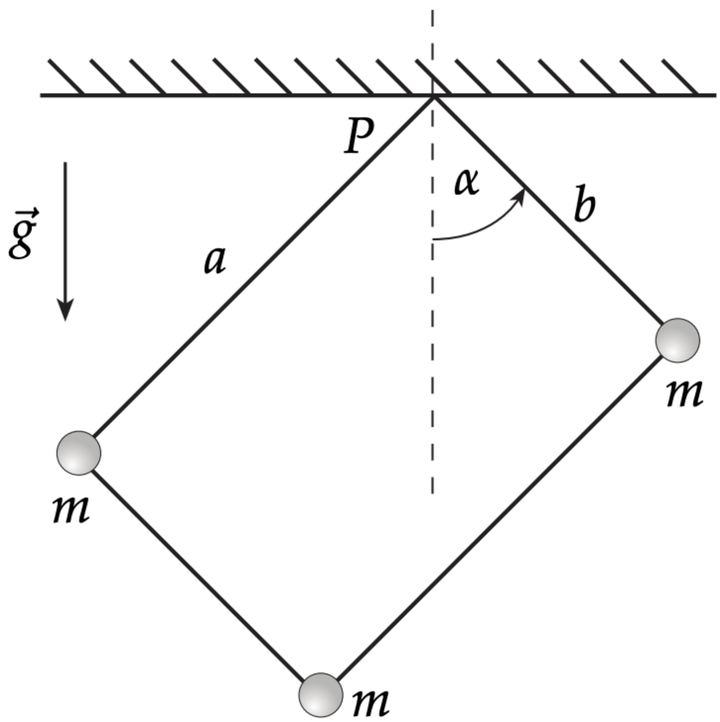
P4.-

Tres partículas de masa m están en los vértices de un rectángulo de $a \times b$, formado por varas ideales de masa despreciable. El cuarto vértice está fijo a un punto P (ver Figura). El rectángulo puede girar en torno a un eje que pasa por P y es perpendicular a la figura.

a) Usando torque y momentum angular calcule la ecuación de movimiento para el ángulo con respecto a la vertical ϕ (en la figura es α)

b) Usando a) calcule el punto de equilibrio del sistema

c) Usando aproximación en serie de Taylor encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio



Formulario

Coordenadas cilíndricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}$$

Torque y momentum angular

Para un sistema con n partículas, tenemos la relación

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\,,$$

donde

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_i\,; \qquad \vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i\,.$$

Las fórmulas de torque y momentum angular son:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}\,; \qquad \vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}\,,$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula de interés, $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula y $\vec{v}$ la velocidad de la misma.

Sistema de partículas

Cuando tratamos con más de una partícula, podemos ocupar la ecuación

$$M\ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{tot}}\,,$$

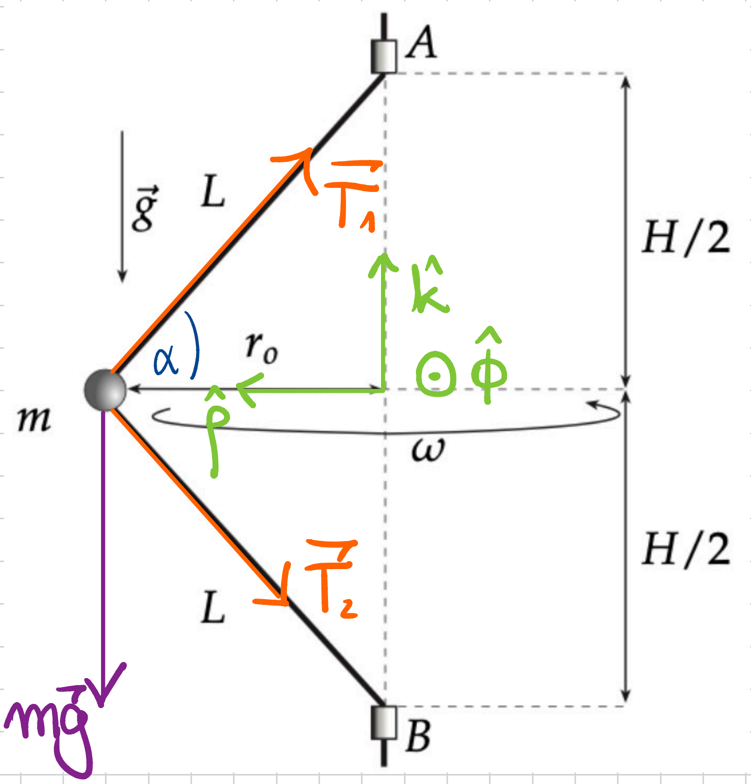
donde M es la suma de todas las masas involucradas, $\vec{R}_{\text{CM}}$ el vector posición del centro de masa (CM) dado por

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\,,$$

y $\vec{F}_{\text{tot}}$ es la suma de **todas** las fuerzas externas ejercidas sobre le sistema.

Auxiliar 5

P1



a) Debido al movimiento rotacional contenido en un solo plano: utilizaremos coordenadas cilíndricas.

Tenemos 3 fuerzas:

- Tensión 1: $\vec{T}_1 = T_1(-\cos\alpha\,\hat{\rho} + \sin\alpha\,\hat{k})$
- Tensión 2: $\vec{T}_2 = T_2(-\cos\alpha\,\hat{\rho} - \sin\alpha\,\hat{k})$
- Peso: $m\vec{g} = -mg\,\hat{k}$

donde estamos considerando $T_i > 0$.

Ahora, para el primer ítem, la aceleración es

$$\vec{a} = (\underbrace{\cancel{\ddot{\rho}}}_{=0} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \underbrace{\cancel{\ddot{z}}}_{=0}\hat{k}$$

$$= -r_0\omega^2\hat{\rho} + \frac{1}{r_0}\frac{d}{dt}(r_0^2\dot{\phi})\hat{\phi}$$

Entonces, la EoM vectorial es

$$-mr_0\omega^2\hat{\rho} + \frac{m}{r_0}\frac{d}{dt}(r_0^2\dot{\phi})\hat{\phi} = T_1(-\cos\alpha\,\hat{\rho} + \sin\alpha\,\hat{k}) + T_2(-\cos\alpha\,\hat{\rho} - \sin\alpha\,\hat{k}) - mg\,\hat{k}$$

y las EoMs escalares

$$\hat{\rho})\quad -mr_0\omega^2 = -(T_1 + T_2)\cos\alpha$$

$$\hat{\phi})\quad mr_0\ddot{\phi} = 0$$

$$\hat{k})\quad 0 = (T_1 - T_2)\sin\alpha - mg$$

Buscamos una condición de desigualdad para ω, así que hacemos uso de que $T_i > 0$. Despejemos T_2 de $\hat{\rho})$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{mr_0\omega^2}{\cos\alpha} - T_2$$

y reemplazamos en $\hat{k})$

$$0 = \left(\frac{m r_0 \omega^2}{\cos\alpha} - 2T_2 \right) \sin\alpha - mg$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{m r_0 \omega^2}{2} \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{mg}{2} \frac{1}{\sin\alpha} \overset{!}{>} 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 > \frac{g}{r_0} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (1)$$

Por geometría del problema, sabemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{H}{2} \frac{1}{r_0} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2r_0}{H}$$

que reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{r_0} \frac{2r_0}{H} = \frac{2g}{H}}$$

b) Ahora, la distancia ρ es variable. Por Pitágoras tenemos que

$$L^2(t) = \rho^2(t) + \frac{H^2}{4}$$

que derivamos c/r al tiempo

$$2L\dot{L} = 2\rho\dot{\rho}$$

donde, por enunciado, $\dot{L} = -v_0$

$$\Rightarrow \dot{\rho}(t) = -\frac{L(t)}{\rho(t)} v_0 \quad (2)$$

y derivando otra vez

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{v_0^2}{\rho} + \frac{L}{\rho^2} \dot{\rho} v_0$$

reemplazando $\dot{\rho}$ con (2)

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = \frac{v_0^2}{\rho} - \frac{L^2}{\rho^3} v_0^2$$

$$= \frac{v_0^2}{\rho^3} (\rho^2 - L^2)$$

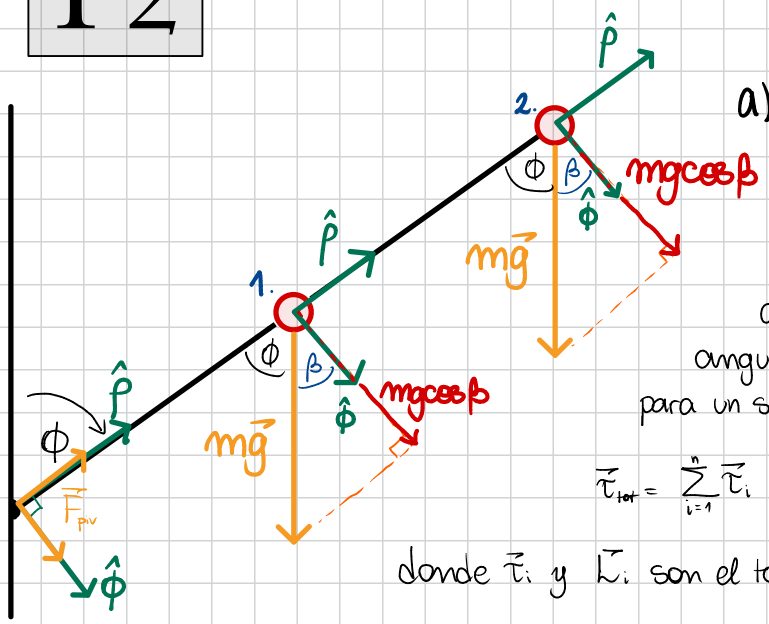
$$= -\frac{v_0^2}{\rho^3} \frac{H_0^2}{4}$$

donde en el último paso ocupamos la relación de Pitágoras.

Finalmente, concluimos que la cte. de proporcionalidad es:

$$\boxed{-\frac{H_0^2 v_0^2}{4}}$$

P2



a) Para los problemas con masas y varas que las hacen girar con respecto a un eje, usamos la fórmula

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \quad (1)$$

que nos relaciona el torque total con el momento angular de las masas. Esta fórmula es válida tanto para un sist. con 1 como con n partículas, ya que

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i \quad ; \quad \vec{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

donde $\vec{\tau}_i$ y $\vec{L}_i$ son el torque y el momento angular de la i-ésima partícula

Para este problema tenemos dos partículas de masa m. La partícula 1. se encuentra a una distacia D del pivote y la única fuerza externa (ojo que la fuerza de la barra sobre la partícula tiene asociada un torque nulo) es la gravitacional

$$\vec{F}_1 = m\vec{g} = -mg\sin\beta\,\hat{\rho} + mg\cos\beta\,\hat{\phi}$$

y el brazo de torque, o vector posición $\vec{r}$, que va desde el pivote a la partícula, es $\vec{r}_1 = D\hat{\rho}$. Así que al calcular el torque sobre esta partícula, usando la fórmula

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,tot} \quad , \quad \text{con } \vec{F}_{i,tot} = \sum_j \vec{F}_{i,j} \quad \text{todas las fuerzas sobre la i-ésima partícula}$$

quedaría como

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,tot} = (D\hat{\rho}) \times (-mg\sin\beta\,\hat{\rho} + mg\cos\beta\,\hat{\phi})$$

$$= Dmg\cos\beta\;\hat{\rho}\times\hat{\phi}$$

$$= Dmg\cos\beta\;\hat{k} \quad (2)$$

Ahora, calculemos el momentum angular de la partícula 1., usando

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} = m\,\vec{r}\times\vec{v}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula. Notamos que en cilíndricas

$$\vec{v}_1 = \overset{0}{\cancel{\dot{\rho}}}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} = D\dot{\phi}\hat{\phi} \text{, reemplazando en } \vec{L}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_1 = m\vec{r}_1\times\vec{v}_1 = m(D\hat{\rho})\times(D\dot{\phi}\hat{\phi}) = mD^2\dot{\phi}\,\hat{k}$$

derivando con respecto al tiempo

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_1}{dt} = mD^2\ddot{\phi}\,\hat{k} \quad (3)$$

Haciendo lo mismo, pero para la partícula 2, donde $D \to 2D$, obtenemos

$$\vec{\tau}_2 = 2Dmg\cos\beta\,\hat{k} \quad ; \quad \frac{d\vec{L}_2}{dt} = 4mD^2\ddot{\phi}\,\hat{k} \quad (4)$$

Así que reemplazando (2), (3) y (4) en (1) obtenemos

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$

$$\Leftrightarrow Dmg\cos\beta\,\hat{k} + 2Dmg\cos\beta\,\hat{k} = mD^2\ddot{\phi}\,\hat{k} + 4mD^2\ddot{\phi}\,\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow 3\cancel{D}\cancel{m}g\cos\beta\,\cancel{\hat{k}} = 5\cancel{m}D^{\cancel{2}}\ddot{\phi}\,\cancel{\hat{k}}$$

$$\Rightarrow 3g\cos\beta = 5D\ddot{\phi}$$

donde, por geometría, $\beta = \pi/2 - \phi$

$$\Rightarrow 3g\sin\phi = 5D\ddot{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi} - \frac{3g}{5D}\sin\phi = 0 \quad (5)$$

con lo que obtenemos una relación entre la aceleración y la posición de las partículas.

b) Para encontrar la fuerza que ejerce el pivote debemos utilizar la EoM para un sistema de partículas

$$M_{tot}\cdot\ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i$$

donde $\vec{F}_i$ son todas las fuerzas actuando sobre el sistema (no solo las fuerzas ejercidas directamente sobre la partícula). En este problema, además de la fuerza peso sobre las partículas, tenemos la fuerza que ejerce el pivote sobre la barra para que esta pueda girar sin caer ni moverse horizontalmente.

Considerando la fuerza del pivote como

$$\vec{F}_{piv} = F_{piv,\rho}\,\hat{\rho} + F_{piv,\phi}\,\hat{\phi}$$

$\boxed{\text{* Esta fuerza no genera torque porque el } \vec{r} = \vec{0}}$

y el CM se encuentra en $\vec{R}_{CM} = 3D/2\,\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{3D}{2}\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = \frac{3D}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{3D}{2}\dot{\phi}^2\hat{\rho}$, además $M_{tot} = 2m$

Reemplazando

$$\Rightarrow 2m\frac{3D}{2}\left(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}\right) = F_{piv,\rho}\hat{\rho} + F_{piv,\phi}\hat{\phi} - 2mg\sin\beta\,\hat{\rho} + 2mg\cos\beta\,\hat{\phi}$$

$$= F_{piv,\rho}\hat{\rho} + F_{piv,\phi}\hat{\phi} - 2mg\cos\phi\,\hat{\rho} + 2mg\sin\phi\,\hat{\phi}$$

y nuestras ecs. de mov. escalares serían

$$\hat{\rho})\; -3Dm\dot{\phi}^2 = F_{piv,\rho} - 2mg\cos\phi \rightarrow F_{piv,\rho} = -3Dm\dot{\phi}^2 + 2mg\cos\phi \quad (6)$$

$$\hat{\phi})\; 3Dm\ddot{\phi} = F_{piv,\phi} + 2mg\sin\phi \rightarrow F_{piv,\phi} = 3Dm\ddot{\phi} - 2mg\sin\phi \quad (7)$$

así que resolviendo (5) encontraríamos las fuerzas del pivote para todo tiempo o para cualquier posición. Hagámoslo.

Debido a la forma de la EDO, solo podremos integrarla una vez con truquazo de mecánica

$$\Rightarrow \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \frac{3g}{5D}\sin\phi \quad / \int_{\phi_0=0}^{\phi} d\phi$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\phi}_0=0}^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\, d\dot{\phi} = \frac{3g}{5D}\int_0^{\phi}\sin\phi\, d\phi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} = -\frac{3g}{5D}\cos\phi\Big|_0^{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}^2(\phi) = \frac{6g}{5D}(1-\cos\phi) \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (6) y (5) en (7), obtenemos las fuerzas en función del ángulo

- $F_{piv,p} = -3Dm\left(\frac{6g}{5D}(1-\cos\phi)\right) + 2mg\cos\phi$

$$= -\frac{18}{5}mg + \frac{18}{5}mg\cos\phi + 2mg\cos\phi$$

$$= \frac{28}{5}mg\cos\phi - \frac{18}{5}mg \quad //$$

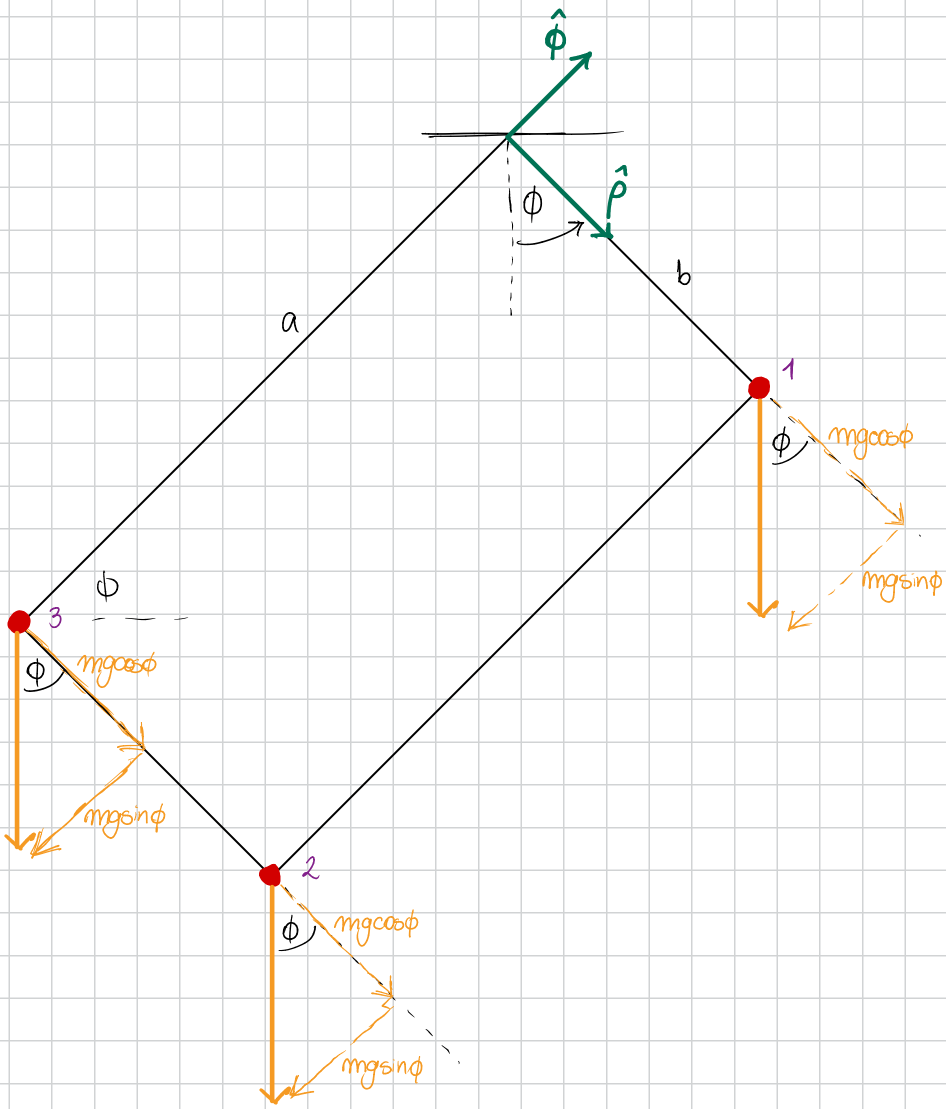
{¿Cuánto vale en $\phi=0$?

- $F_{piv,\phi} = 3Dm\left(\frac{3g}{5D}\sin\phi\right) - 2mg\sin\phi$

$$= \frac{9}{5}mg\sin\phi - 2mg\sin\phi$$

$$= -\frac{mg}{5}\sin\phi \quad //$$

P4



Sabemos que con la ecuación maestra

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

conseguiremos la ec. de mov. para el ángulo ϕ y con esto podremos hacer Taylor (si es que es necesario) y conseguir la ec. de mov. de un oscilador armónico donde podremos identificar la frecuencia de pequeños oscilaciones

Primero definamos la posición de cada masa ocupando un sist. cilíndrico centrado en el pivote

▷ $\vec{r}_1 = b\hat{\rho}$ ▷ $\vec{r}_2 = b\hat{\rho} - a\hat{\phi}$ ▷ $\vec{r}_3 = -a\hat{\phi}$

con esto podemos calcular las velocidades derivando una vez

▷ $\vec{v}_1 = b\dot{\phi}\hat{\phi}$ ▷ $\vec{v}_2 = b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{\rho}$ ▷ $\vec{v}_3 = a\dot{\phi}\hat{\rho}$

así que los momentums angular serían ($\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$)

▫ $\vec{L}_1 = m\, b\hat{\rho} \times (b\dot{\phi}\hat{\phi}) = mb^2\dot{\phi}\hat{k}$

▫ $\vec{L}_2 = m(b\hat{\rho} - a\hat{\phi}) \times (b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{\rho}) = m(b^2 + a^2)\dot{\phi}\hat{k}$

▫ $\vec{L}_3 = m \cdot (-a\hat{\phi}) \times (a\dot{\phi}\hat{\rho}) = ma^2\dot{\phi}\hat{k}$

$$\therefore \vec{L}_{tot} = m(2b^2+2a^2)\dot{\phi}\hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 2m(a^2+b^2)\ddot{\phi}\hat{k}$$

Ahora calculemos los torques. Notemos que como ocupamos el mismo sist. de coord. para las 3 partículas, la fuerza peso para las 3 partículas es:

$$m\vec{g} = mg\cos\phi\hat{\rho} - mg\sin\phi\hat{\phi}$$

así que los torques ($\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$) serían

- $\vec{\tau}_1 = b\hat{\rho} \times (mg\cos\phi\hat{\rho} - mg\sin\phi\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\hat{k}$
- $\vec{\tau}_2 = (b\hat{\rho} - a\hat{\phi}) \times (mg\cos\phi\hat{\rho} - mg\sin\phi\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\hat{k} + mga\cos\phi\hat{k}$
- $\vec{\tau}_3 = -a\hat{\phi} \times (mg\cos\phi\hat{\rho} - mg\sin\phi\hat{\phi}) = mga\cos\phi\hat{k}$

$$\therefore \vec{\tau}_{tot} = 2mga\cos\phi\hat{k} - 2mgb\sin\phi\hat{k}$$

Así que la ec. maestra quedaría como

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow 2mga\cos\phi\hat{k} - 2mgb\sin\phi\hat{k} = 2m(a^2+b^2)\ddot{\phi}\hat{k}$$

$$\Rightarrow ga\cos\phi - gb\sin\phi = (a^2+b^2)\ddot{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi} = \frac{ga\cos\phi - gb\sin\phi}{a^2+b^2}$$

b) Ahora, los puntos de equilibrio se dan donde la suma de fuerzas es 0 (por eso $\partial U/\partial q \overset{!}{=} 0$), o sea que la aceleración en ese eje sea 0 (por Newton), entonces imponemos que $\ddot{\phi} \overset{!}{=} 0$ y despejamos ϕ_{eq} que cumpla eso

$$\Rightarrow 0 = \frac{ga\cos\phi_{eq} - gb\sin\phi_{eq}}{a^2+b^2} \Leftrightarrow a\cos\phi_{eq} = b\sin\phi_{eq} \Leftrightarrow \tan\phi_{eq} = \frac{a}{b}$$

y por enunciado nos dicen que consideremos $a = \sqrt{3}\cdot b$

$$\Rightarrow \tan\phi_{eq} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \phi_{eq} = \frac{\pi}{3}$$

c) Ya tenemos el pto. de equil., así que calculemos la frecuencia de pequeñas oscilaciones. Tenemos la EDO

$$\ddot{\phi} = \frac{ga}{c^2}\cos\phi - \frac{gb}{c^2}\cos\phi, \quad \text{donde definí } c^2 \equiv a^2+b^2$$

entonces debemos considerar una pequeña variación en torno al ángulo de equil, o sea algo como

$$\phi(t) = \frac{\pi}{3} + \delta(t), \text{ donde } \delta \ll 1 \quad \text{(una pequeña variación)}$$

Ojo que δ sería variable. Entonces reemplacemos en la EDO

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\pi/3 + \delta(t)\right) = \frac{ga}{c^2}\cos(\pi/3+\delta) - \frac{gb}{c^2}\sin(\pi/3+\delta) \quad (*)$$

donde el primer término solo quedaría como $\ddot{\delta}(t)$, y para las funciones trigonom. usamos las propiedades

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

entonces

- $\cos(\pi/3+\delta) = \cos(\pi/3)\cos(\delta) - \sin(\pi/3)\sin(\delta) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$
- $\sin(\pi/3+\delta) = \sin(\pi/3)\cos(\delta) + \cos(\pi/3)\sin(\delta) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\delta}{2}$

donde en el último paso usamos la aproximación $\cos(\delta)\approx 1$ y $\sin(\delta)\approx\delta$ ya que $\delta \ll 1$. Reemplazamos en $(*)$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} = \frac{ga}{c^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\right) - \frac{gb}{c^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\delta\right)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta} = -\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{gb}{c^2}\right]\cdot\delta + \frac{ga}{2c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{gb}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta} = -\omega_0^2\delta + \frac{ga}{c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{gb}{c^2}, \text{ donde definí } \omega_0^2 \equiv \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{gb}{c^2}\right]$$

y si hacemos el c.v. $\tilde{\delta} = \delta - \frac{1}{\omega_0^2}\left[\frac{ga}{c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{gb}{c^2}\right] \Rightarrow \ddot{\tilde{\delta}} = \ddot{\delta}$ y la EDO que nos queda es

$$\ddot{\tilde{\delta}} = -\omega_0^2\tilde{\delta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\tilde{\delta}} + \omega_0^2\delta = 0$$

que es la EDO de un oscilador armónico con frecuencia de oscilación $\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{gb}{c^2}}$ que sería nuestra frecuencia de pequeñas oscilaciones.