Auxiliar 5

Cross sections and decay rates

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliar: Javier Huenupi

P1.-

a) Considere una teoría de dos campos reales A y B con una interacción $\mathcal{L}_1 = gAB^2$. Asumiendo que $m_A > 2m_B$, calcule la tasa de decaimiento total de la partícula A a *tree-level* (sin *loops*)

b) Considere una teoría de un campo escalar real φ y un campo escalar complejo χ con $\mathcal{L}_1 = g\varphi\chi^\dagger\chi$. Asumiendo que $m_A > 2m_\chi$, calcule la tasa de decaimiento total de la partícula φ a *tree-level*

P2.-

Considere el scattering de Compton, en el cual un fotón sin masa es deflectado por un electrón, inicialmente en reposo (o sea, en el marco de referencia del electrón (*FT frame*)).

a) Dibuje **todos** los diagramas a *tree-level* asociados a la interacción $e^-\gamma \to e^-\gamma$

b) Usando las reglas diagramáticas de QED, encuentre la expresión de la matriz $\langle|\mathcal{T}|^2\rangle$. No es necesario simplificar las sumatorias del promedio de spines (ver siguiente ítem)

c) Ahora, utilice como conocido que

$$|\mathcal{T}|^2 = 32\pi^2\alpha^2\left[\frac{m^4 + m^2(3s+u) - su}{(m^2-s)^2} + \frac{m^4 + m^2(3u+s) - su}{(m^2-u)^2} + \frac{2m^2(s+u+2m^2)}{(m^2-s)(m^2-u)}\right] + \mathcal{O}(\alpha^4),$$

donde $\alpha = 1/137.036$ la constante de estructura fina, y m, s, u las variables de Mandelstam. Entonces, exprese s y u en términos de la energía inicial y final de los fotones, ω y ω'

d) Exprese el ángulo de scattering θ_{FT} entre el three-momentum inicial y final del fotón en términos de ω y ω'

e) Exprese la cross section diferencial de scattering $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega_{\text{FT}}$ en términos de ω y ω'. Muestre que su resultado es equivalente a la fórmula *Klein-Nishina*

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{\text{FT}}} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2(\theta_{\text{FT}})\right]$$

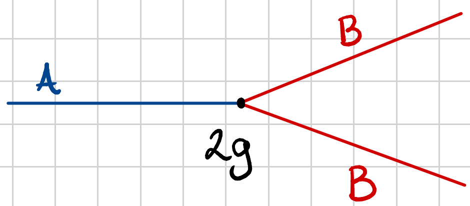
Auxiliar 5

P1

a) Estamos considerando una teoría como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial A)^2 - \frac{1}{2}(\partial B)^2 + g A B^2$$

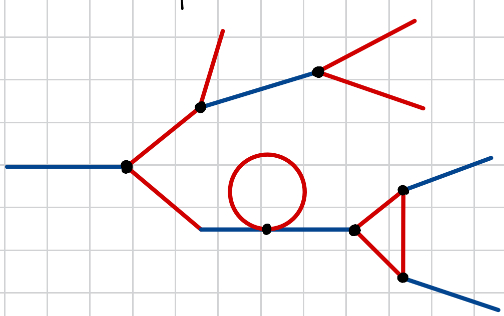
por lo que tenemos vértices que unen 1 partícula A con 2 partículas B



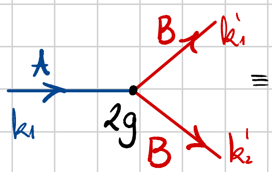
Nosotros queremos calcular $|T|^2$ que se define usando la fórmula LSZ t.q.

$$\langle f | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{in}^{tot} - k_{out}^{tot})\, i\mathcal{T}$$

donde $i\mathcal{T}$ consiste en la contribución de todos los diagramas conectados y, en este caso, con una partícula inicial A y con una cantidad arbitraria de tanto partículas B como A. Por esto último notamos que hay diagramas de la forma

$i\mathcal{T} \supseteq$ 

donde partimos con 1 partícula A y luego de varios decaimientos acabamos con 2 partículas A y 2 partículas B. Sin embargo, es un diagrama de orden $\mathcal{O}(g^V)$ con V el número de vértices, y nosotros, por el momento, nos enfocaremos en la contribución más simple (y la principal)

$i\mathcal{T} \supseteq$  $= i\mathcal{T}_{main} + \mathcal{O}(g^2)$

Usando las reglas diagramáticas, las patas externas aportan 1 y como no tenemos loops ni patas internas

$$\Rightarrow \boxed{i\mathcal{T}_{main} = i2g}$$

que tenemos que reemplazar en la fórmula del decay rate diferencial

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_1} |T|^2 dLIPS_2(k_1)$$

donde $E_1 = m_A$ en el marco de la partícula A, y

$$dLIPS_2(k_1) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - k_1' - k_2') d\tilde{k}_1' d\tilde{k}_2'$$

Ahora, considerando el FT de A inicial $\Rightarrow k_1^\mu = (E_1, \vec{k}_1) = (m_A, \vec{0})$, entonces podemos reescribir la delta como

$$\delta^{(4)}(k_1 - k_1' - k_2') = \delta^{(1)}(-E_1 + E_1' + E_2')\delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_1' - \vec{k}_2')$$

$$= \delta^{(1)}(E_1' + E_2' - m_A)\delta^{(3)}(\vec{k}_1' + \vec{k}_2')$$

entonces

$$dLIPS_2(k_1) = \frac{1}{4(2\pi)^2 E_1' E_2'} \delta^{(1)}(E_1' + E_2' - m_A)\delta^{(3)}(\vec{k}_1' + \vec{k}_2') d^3k_1' d^3k_2'$$

donde $E_i' = \sqrt{|\vec{k}_i'|^2 + m_B^2}$. Debido a que integraremos dLIPS, podemos resolver la integral sobre k_2' usando la segunda delta, lo que implica hacer $\vec{k}_2 \to -\vec{k}_1$

$$\Rightarrow dLIPS_2(k_1) = \frac{1}{4(2\pi)^2 E_1'^2} \delta^{(1)}(2E_1' - m_A) d^3k_1'$$

* De $\delta^{(1)}(2E_1' - m_A)$ notamos que se debe cumplir $m_A > 2m_B$, ya que $2E_1' = 2\sqrt{|\vec{k}_1'|^2 + m_B^2} \overset{!}{=} m_A$ y como $|\vec{k}_1| > 0$
$\Rightarrow 2E_1' \geq 2m_B \Rightarrow m_A \geq 2m_B$ para que se pueda cumplir la delta.

Ahora, $d^3k_1' = |\vec{k}_1'|^2 d|\vec{k}_1| d\Omega_{cm}$ con $d\Omega_{cm} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ medido c/r a $\vec{k}_1$. Cuando integremos dLIPS haremos operar la delta, que implica

$$2E_1' = 2\sqrt{|\vec{k}_1'|^2 + m_B^2} \overset{!}{=} m_A$$

$$\Rightarrow |\vec{k}_1'| \overset{!}{=} \sqrt{\frac{m_A^2}{4} - m_B^2}$$

así que

$$dLIPS_2(k_1) = \frac{1}{4\pi^2 m_A^2} \left(\frac{m_A^2}{4} - m_B^2 \right) d\Omega_{cm}$$

$$\Rightarrow d\Gamma = \frac{4g^2}{8\pi^2 m_A^3} \left(\frac{m_A^2}{4} - m_B^2 \right) \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Con esto podemos calcular fácilmente Γ

$$\Gamma = \frac{1}{S} \int d\Gamma = \frac{g^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{4m_A} - \frac{m_B^2}{m_A^3} \right) \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{g^2}{4\pi m_A} \left(1 - \frac{4m_B^2}{m_A^2} \right)$$

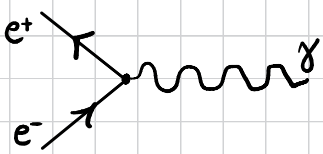
P2

a) El lagrangiano de QED está dado por

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{teo. libre fotón (sin masa)}} + \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi}_{\text{teo. libre } e^- \text{ o } e^+ \text{ con masa } m} \underbrace{- e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi}_{\text{interacción}}$$

del último término sabemos que los vértices son:



(1)

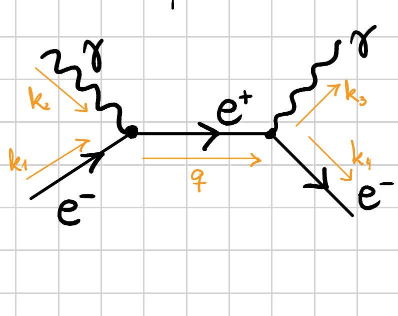
Las reglas de Feynman para esta teoría son:

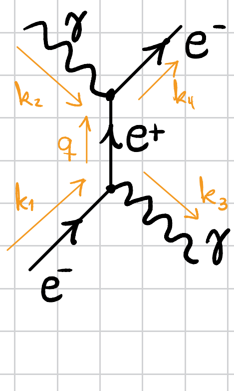
1. Líneas externas:
   - Electrones: Incoming $(\rightarrow\bullet)$: u; Outcoming $(\bullet\rightarrow)$: $\bar{u}$
   - Positrones: Incoming $(\leftarrow\bullet)$: $\bar{v}$; Outcoming $(\bullet\leftarrow)$: v
   - Fotones: Incoming $(\sim\sim\bullet)$: ϵ_μ; Outcoming $(\bullet\sim\sim)$: ϵ_μ^*

2. Factor de vértices: $ig_e\gamma^\mu$, con $g_e = e\sqrt{4\pi} = \sqrt{4\pi\alpha}$

3. Propagadores internos:
   - Electrones y positrones: $i\frac{(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$
   - Fotones: $-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$

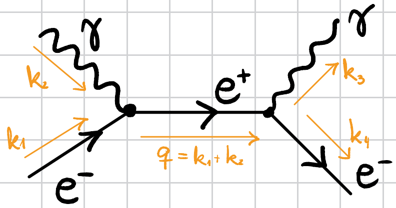
Nosotros ahora estamos interesados en el scattering de Compton, o sea, $e^-\gamma \longrightarrow e^-\gamma$, así que dibujamos todos los diagramas posibles (al orden más bajo) usando vértices como (1) y t.q. partamos con 1 e^- y 1 γ y terminar con las mismas partículas

$i\mathcal{T} \simeq$ 

$+$ 

$+ \mathcal{O}(g_e^4)$

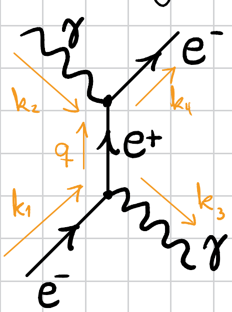
b) Veamos cada diagrama



$$= i\,\epsilon^*_\mu(k_3)\left[\bar{u}(k_4)\; i g_e \gamma^\mu \; \frac{i(\gamma^\alpha q_\alpha + m)}{q^2 - m^2}\; (i g_e \gamma^\nu)\; u(k_1)\right]\epsilon_\nu(k_2)$$

$$= \frac{g_e^2}{(k_1+k_2)^2 - m^2}\left[\bar{u}(k_4)\,\not{\epsilon}^*(k_3)\,(\not{k}_1 + \not{k}_2 + m)\,\not{\epsilon}(k_2)\,u(k_1)\right]$$

donde utilizamos, por conservación de momentum, que $q = k_1 + k_2$. Además, usamos la notación de Dirac $\gamma^\mu k_\mu = \not{k}$.
Ahora, la segunda contribución es



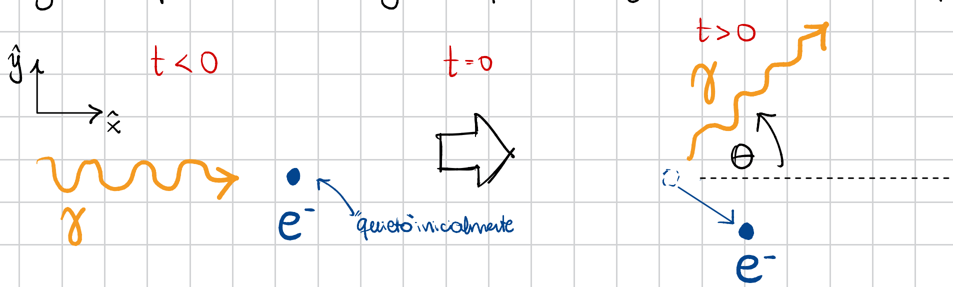
$$= i\epsilon_\mu(k_2)\left[\bar{u}(k_4)\; i g_e \gamma^\mu\; \frac{i(\gamma^\alpha (k_1 - k_3)_\alpha + m)}{(k_1 - k_3)^2 - m^2}\; i g_e \gamma^\nu\; u(k_1)\right]\epsilon^*_\nu(k_3)$$

$$= \frac{g_e^2}{(k_1 - k_3)^2 - m^2}\left[\bar{u}(k_4)\,\not{\epsilon}(k_2)\,(\not{k}_1 - \not{k}_3 + m)\,\not{\epsilon}^*(k_3)\,u(k_1)\right]$$

c) Sucede que en un experimento real las polarizaciones de los fermiones y fotones es desconocida, por lo que debemos "sumar sobre nuestra ignorancia", o sea considerar todas las posibles polarizaciones y sumar todas esas contribuciones. Para esto hay que usar unos trucos matemáticos, pero consideramos ese resultado como conocido

$$\langle |T|^2 \rangle = 32\pi^2\alpha^2\left[\frac{m^4 + m^2(3s+u) - su}{(m^2-s)^2} + \frac{m^4 + m^2(3u+s) - su}{(m^2-s)^2} + \frac{2m^2(s+u+2m^2)}{(m^2-s)(m^2-u)}\right] + O(\alpha^4)$$

Debemos escribir s y u en función de la energía del fotón, utilizando el marco de referencia del e^-



Digamos que p y p' son los 4-momentum del e^- antes y después de la colisión, y k y k' para el fotón.
Entonces,

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

ya que estamos en su marco. Mientras que el γ siempre se mueve a velocidad c, o sea, $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$, y como su 4-momentum está definido como

$$k^\mu = (E, Ev_x, Ev_y, Ev_z)$$

y $v_y = v_z = 0$ entonces $E = \hbar\omega \Rightarrow k^\mu = (\omega, \omega, 0, 0)$. Luego es scattereado y su frecuencia/energía cambia ya que le transfiere energía al e^-. Entonces

$$k'^{\mu} = (\omega', \omega'\cos\theta, \omega'\sin\theta, 0)$$

Ahora, s se define como $s \equiv -(k_1 + k_2)^2$ que en este caso sería

$$s = -(p+k)_{\mu}(p+k)^{\mu}$$

$$= (p^0 + k^0)(p^0 + k^0) - (\vec{p} + \vec{k})(\vec{p} + \vec{k})$$

$$= (m + \omega)^2 - \omega^2$$

$$= m^2 + 2m\omega$$

y sabemos que $u \equiv -(k_1 - k_2')^2$ entonces

$$u = (p^0 - k'^0)^2 - (\vec{p} - \vec{k}')^2$$

$$= m^2 - 2m\omega' + \omega'^2 - \omega'^2$$

$$= m^2 - 2m\omega'$$

d) Ahora, nos piden encontrar $\theta = \theta(\omega, \omega')$. Este ángulo aparece en k', que lo hacemos aparecer utilizando que por conservación del momentum

$$p + k = p' + k' \Rightarrow p' = p + k - k'$$

y luego de la interacción el e^- está on-shell, o sea cumple $p'^2 = -m^2$

$$\Rightarrow -m^2 = (p + k - k')^2$$

$$= -(p^0 + k^0 - k'^0)^2 + (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}')^2$$

$$= -(m + \omega - \omega')^2 + (\omega - \omega'\cos\theta)^2 + (-\omega'\sin\theta)^2$$

$$= -m^2 - 2m\omega + 2m\omega' - 2m\omega\omega' - 2\omega\omega'\cos\theta$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\theta = m\left(-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'}\right) \quad (2)$$

e) Reemplazando s y u en función de ω y ω' en $\langle |T|^2 \rangle$, y haciendo aparecer $1 - \cos\theta$, obtenemos

$$\langle |T|^2 \rangle = 32\pi\alpha^2 \left[-\sin^2\theta + \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right]$$

Queremos calcular $d\sigma / d\Omega_{FT}$, entonces ocupando la fórmula del Srednicki para un proceso $A + B \rightarrow A + B$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s |\vec{k}_1|^2_{CM}} \langle |T|^2 \rangle$$

donde

$$|\vec{k}_1|_{CM} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 2(m_1^2+m_2^2)s + (m_1^2-m_2^2)^2} \quad , \; m_1 = m \; y \; m_2 = 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 2m^2 s + m^4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{(m^2+2m\omega)^2 - 2m^2(m^2+2m\omega) + m^4}$$

$$= \frac{m\omega}{\sqrt{s}}$$

$$\Rightarrow s|\vec{k}_1|^2_{CM} = m\omega$$

Ahora, queremos t en función de Ω_{FT}. Sabemos que

$$s+t+u = \overset{=m^2}{\cancel{m_1^2}} + \overset{=0}{\cancel{m_2^2}} + \overset{=m^2}{\cancel{m_{1'}^2}} + \overset{=0}{\cancel{m_{2'}^2}} = 2m^2$$

$$\Rightarrow t = 2m^2 - s - u$$

$$= 2m(\omega' - \omega)$$

ω es una constante, mientras que ω' depende del ángulo θ. Por (2) sabemos que

$$\omega' = \frac{m\omega}{m+\omega(1-\cos\theta)} \Rightarrow d\omega = \frac{m\omega^2}{(m+\omega(1-\cos\theta))^2}\, d\cos\theta$$

$$= \frac{\omega'^2}{m}\, d\cos\theta$$

así que $dt = 2m\,d\omega' = 2\omega'^2 d\cos\theta = -\frac{2\omega'^2}{2\pi}\, d\phi \sin\theta\, d\theta = -\frac{\omega'^2}{\pi}\, d\Omega_{FT}$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}}\right| = \frac{\omega'^2}{\pi}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi^2 m^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\langle|T|^2\rangle$$

$$= \frac{\alpha^2}{2m^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta\right]$$