

Auxiliar 3

Transiciones e integrales de camino

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliar: Javier Huenupi

P1.-

El propagador de Feynman se define como

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 + m^2 - i\epsilon}, \quad (1)$$

donde luego de hacer los cálculos tomamos que $\epsilon \rightarrow 0$. También, por definición, este propagador representa la función de Green de la ecuación de Klein-Gordon,

$$(-\partial^2 + m^2)\Delta(x - x') = \delta^4(x - x'). \quad (2)$$

Utilizando integrales de contorno para la coordenada k^0 demuestre que el propagador de Feynman está dado por

$$\Delta(x - x') = i\theta(t - t') \int \widetilde{dk} e^{ik(x-x')} + i\theta(t' - t) \int \widetilde{dk} e^{-ik(x-x')}.$$

1. **Propuesto:** Demuestre que la expresión (1) cumple (2)
2. **Propuesto:** Haga el mismo procedimiento para obtener el propagador del oscilador armónico cuántico

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{-E^2 + \omega^2 - i\epsilon}$$

donde deberían obtener

$$G(t - t') = \frac{i}{2\omega} \exp(-i\omega|t - t'|).$$

P2.-

Para el caso del oscilador armónico cuántico, la amplitud de ir del estado basal en $t' \rightarrow -\infty$ al estado basal $t'' \rightarrow +\infty$ en presencia de una fuerza/fuente $f(t)$ se define, en cuadro de Heisenberg, como

$$W_0[f] \equiv \langle 0; +\infty | 0; -\infty \rangle,$$

donde $\langle 0; +\infty | 0; -\infty \rangle = \langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle$ en estado de Schrödinger, donde el operador de evolución temporal se puede escribir como

$$U(t_f, t_i) = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(q, p) + f(t)q) \right] |q(t_f)\rangle \langle q(t_i)|.$$

- a) Utilizando la prescripción $i\epsilon$, $H \rightarrow (1 - i\epsilon)H$, calcule $W_0[f]$ en función de la transformada de Fourier de la fuerza

$$\tilde{f}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt} f(t)$$

- b) Encuentre una expresión, en función de $W_0[f]$, de $\langle 0; +\infty | 1; -\infty \rangle$, donde $|1; -\infty\rangle = U^\dagger(\infty, t_0) |1\rangle$ con $|1\rangle$ el primer estado excitado del oscilador armónico

Auxiliar 3

P1

El propagador de Feynman se define como

$$\Delta(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 + m^2 - i\epsilon}$$

que realmente son 4 integrales $\int d^4k = \int dk^0 \int d^3\vec{k}$, donde podemos resolver de forma exacta la integral en k^0 . Notemos que podemos escribirla como

$$\begin{aligned} \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0(t-t')}}{k^2 + m^2 - i\epsilon} &= \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0(t-t')}}{- (k^0)^2 + |\vec{k}|^2 + m^2 - i\epsilon} \quad , \quad k^2 \equiv k_\mu k^\mu = - (k^0)^2 + (\vec{k} \cdot \vec{k}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 + (\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} - i\tilde{\epsilon})][k^0 - (\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} - i\tilde{\epsilon})]} \quad (1) \quad , \quad \tilde{\epsilon} \equiv 2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \end{aligned}$$

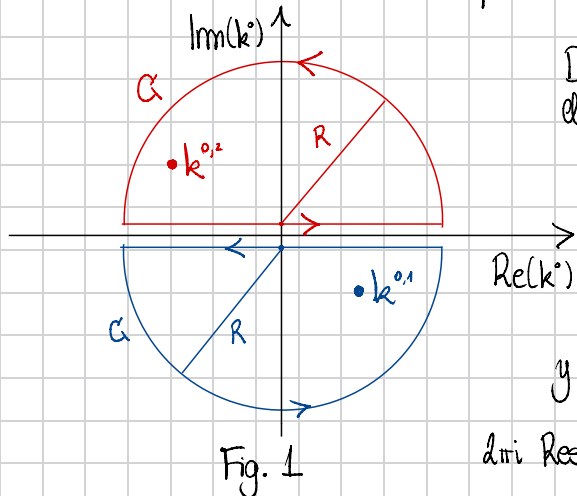
donde en este último paso obtuvimos

$$\begin{aligned} - (k^0)^2 + (\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} - i\epsilon)^2 &= - (k^0)^2 + |\vec{k}|^2 + m^2 - i 2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \tilde{\epsilon} - \epsilon^2 \\ &= - (k^0)^2 + |\vec{k}|^2 + m^2 - i\epsilon \end{aligned}$$

Como $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\epsilon} \rightarrow 0$, simplemente escribamos ϵ en vez de $\tilde{\epsilon}$. Lo importante es notar que (1) tiene dos polos simples en:

$$k^{0+} \equiv \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} - i\epsilon \quad \text{y} \quad k^{0-} \equiv -\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} + i\epsilon$$

donde k^{0+} se encuentra bajo el eje de los reales y k^{0-} sobre este eje, por lo que podemos definir dos contornos, cada uno encerrando uno de los polos como se muestra en Fig. 1.



Debemos redefinir la integral (1) para considerar una integral en el plano complejo que recorre C_+ y C_- . Empecemos con C_+ . Como solo encerramos un polo, k^{0+} , por teo. del residuo tenemos

$$\int_{C_+} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{0+}][k^0 - k^{0-}]} = 2\pi i \text{Res}(k^{0+})$$

y como es un polo simple

$$2\pi i \text{Res}(k^{0+}) = \frac{2\pi i}{2\pi} \lim_{k^0 \rightarrow k^{0+}} (k^0 - k^{0+}) \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{0+}][k^0 - k^{0-}]}$$

$$= -i \frac{\exp(-i(-\sqrt{k^2} + i\epsilon)(t-t'))}{[-2\sqrt{k^2} + m^2 - 2i\epsilon]}$$

donde tomando $\epsilon \rightarrow 0$

$$= +i \frac{e^{+i\sqrt{k^2}(t-t')}}{2\sqrt{k^2} + m^2}$$

Haciendo lo mismo para el otro polo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} &= 2\pi i \operatorname{Res}(k^{01}) \\ &= -i \lim_{k^0 \rightarrow k^{01}} (k^0 - k^{01}) \frac{e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} \\ &= -i \frac{e^{-ik^{01}(t-t')}}{2\sqrt{k^2} + m^2} \end{aligned}$$

Ahora, tenemos que separar estas integrales de contorno en dos contribuciones: línea recta en $\operatorname{Re}(k^0)$ y un arco en la mitad del plano.

$$\int_{\mathcal{C}} f(k^0) dk^0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(k^0) dk^0 + \int_{\text{arco}} f(k^0) dk^0.$$

Analizamos el segundo término para $\mathcal{C}$.

$$\left| \int_{\text{arco}} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0(t-t')}}{- (k^0)^2 + k^2 + m^2 - i\epsilon} \right| \leq \pi R \sup \left| \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik^0(t-t')}}{- (k^0)^2 + k^2 + m^2 - i\epsilon} \right|$$

donde $k^0 = \operatorname{Re}(k^0) + i\operatorname{Im}(k^0) \Rightarrow -ik^0(t-t') = -i\operatorname{Re}(k^0)(t-t') + \operatorname{Im}(k^0)(t-t')$ con el primer término una oscilación rápida (con $R \rightarrow \infty$) y el segundo término se va a 0 si $(t-t') < 0$ con $\operatorname{Im}(k^0) > 0$. Teniendo esta condición

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\pi R}{2\pi} \sup \frac{1}{| - (k^0)^2 + k^2 + m^2 - i\epsilon |} \\ &\leq \frac{R}{2} \frac{1}{(-R^2 + k^2 + m^2 - i\epsilon)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

entonces solo sobrevive la integral en el eje de los reales

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} \underset{\text{si } (t-t') < 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} = \frac{i}{2} \frac{e^{i\sqrt{k^2}(t-t')}}{\sqrt{k^2} + m^2}$$

Para $\mathcal{C}$ podemos llegar a una conclusión similar, pero con la condición necesaria que $(t-t') > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} & \stackrel{\text{ssi: } (t-t') > 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} \\
 & = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} \\
 & = + \frac{i}{2} \frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}}
 \end{aligned}$$

Recordemos que $\omega \equiv k^0 = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ y utilizaremos Heavisides para imponer las condiciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik^0(t-t')}}{[k^0 - k^{01}][k^0 - k^{02}]} = \theta(t'-t) \frac{i}{2\omega} e^{ik^0(t-t')} + \theta(t-t') \frac{i}{2\omega} e^{-ik^0(t-t')}$$

que reemplazando en el propagador

$$\begin{aligned}
 \Delta(x-x') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0(t-t')}}{-(k^0)^2 + |\vec{k}|^2 + m^2 - i\epsilon} \\
 &= i\theta(t'-t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') + ik^0(t-t')} + i\theta(t-t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - ik^0(t-t')}
 \end{aligned}$$

donde para el primer término podemos hacer el c.v. $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$

$$\Delta(x-x') = i\theta(t'-t) \int \tilde{d}\vec{k} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} + i\theta(t-t') \int \tilde{d}\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}$$

P2

Tenemos que la matriz de evolución $U(t_f, t_i)$ se puede expresar como una path integral

$$U(t_f, t_i)_f = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H + p \cdot q) \right] |q(t_f)\rangle \langle q(t_i)|$$

entonces, la amplitud de ir desde $|0; -\infty\rangle = U_f^\dagger(-\infty, t_i)|0\rangle$ a $\langle 0; +\infty| = \langle 0| U_f(+\infty, t_i)$ es

$$\begin{aligned} W.[f] &\equiv \langle 0; +\infty | 0; -\infty \rangle = \langle 0| U_f(+\infty, t_i) U_f^\dagger(-\infty, t_i) |0\rangle \\ &= \langle 0| U_f(+\infty, -\infty) |0\rangle \\ &= \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H + p \cdot q) \right] \langle 0| q(+\infty) \rangle \langle q(-\infty) | 0 \rangle \\ &= \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H + p \cdot q) \right] \psi^*(q(+\infty)) \psi(q(-\infty)) \quad (1) \end{aligned}$$

o sea, la path integral que desarrollaron en clases, pero con unos términos extra $\psi^*(q(+\infty)) \psi(q(-\infty))$. En el Srednicki se discute que para considerar esta contribución basta con considerar

$$H \rightarrow (1-i\epsilon)H$$

de esta forma (1) se puede escribir como

$$W.[f] = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - (1-i\epsilon)H + p \cdot q) \right] \quad (*)$$

y así nos podemos olvidar de los WF.

Ahora, siguiendo los pasos de Srednicki Cap 7 tenemos que

$$(*) \Rightarrow W_0[f] = \exp \left[\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{\tilde{f}(E) \tilde{f}(-E)}{-E^2 + \omega^2 - i\epsilon} \right] \quad (1)$$

sin embargo, considerando que $f(t) \in \mathbb{R}$ ($f^*(t) = f(t)$)

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} \tilde{f}(E) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE'}{2\pi} e^{+iE't} \tilde{f}(-E') \stackrel{!}{=} f^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{+iEt} \tilde{f}^*(E) \\ &\Rightarrow \tilde{f}^*(E) \stackrel{!}{=} \tilde{f}(-E) \end{aligned}$$

entonces en (1) podemos escribir $\tilde{f}(E) \tilde{f}(-E) = |\tilde{f}(E)|^2$. También podemos trabajar el denominador

$$\begin{aligned} \frac{1}{-E^2 + \omega^2 - i\epsilon} &= \frac{-1}{(E - (\omega - i\epsilon))(E + (\omega - i\epsilon))} \stackrel{!}{=} \frac{A}{E - \omega + i\epsilon} + \frac{B}{E + \omega - i\epsilon} \\ &= \frac{AE + A\omega - iA\epsilon + BE - B\omega + iB\epsilon}{(E - (\omega - i\epsilon))(E + (\omega - i\epsilon))} \\ &= \frac{E(A+B) + \omega(A-B) + i\epsilon(B-A)}{(E - (\omega - i\epsilon))(E + (\omega - i\epsilon))} \end{aligned}$$

donde imponemos $A = -B$ $\wedge$ $\omega(A-B) = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2\omega}$ $\wedge$ $B = +\frac{1}{2\omega}$. Reemplazamos todo

$$W_0[\varphi] = \exp \left[\frac{i}{4\omega} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{|\tilde{\varphi}(E)|^2}{E - \omega + i\epsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{|\tilde{\varphi}(E)|^2}{E + \omega - i\epsilon} \right) \right]$$

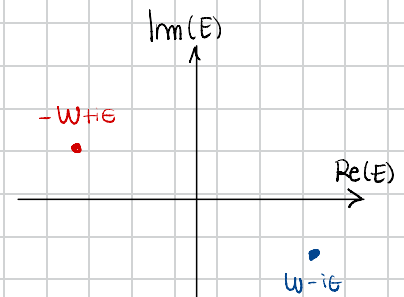
que serían integrales con polos simples $E_i = \pm(\omega - i\epsilon)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{|\tilde{\varphi}(E)|^2}{E - E_i} = \mp 2\pi i \operatorname{Res}(E_i) = \mp i \lim_{E \rightarrow E_i} (E - E_i) \frac{|\tilde{\varphi}(E)|^2}{(E - E_i)} = \mp i |\tilde{\varphi}(E_i)|^2$$

orientación

$$\Rightarrow W_0[\varphi] = \exp \left[-\frac{1}{4\omega} \left(+ |\tilde{\varphi}(\omega)|^2 + |\tilde{\varphi}(-\omega)|^2 \right) \right], \quad |\tilde{\varphi}(-\omega)|^2 = |\tilde{\varphi}(\omega)|^2$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{4\omega} |\tilde{\varphi}(\omega)|^2 \right]$$



Ahora, queremos $\langle 0; +\infty | 1; -\infty \rangle$

$$\langle 0 | U(+\infty, t) U^\dagger(-\infty, t) | 1 \rangle = \langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 1 \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt (p\dot{q} - H + p \cdot q) \right] \langle 0 | q(+\infty) \rangle \langle q(-\infty) | 1 \rangle$$

$$\text{donde sabemos que } \langle q(-\infty) | \hat{a} | 0 \rangle = \sqrt{2\omega} \langle q(-\infty) | \hat{q} | 0 \rangle = \sqrt{2\omega} q(-\infty) \langle q(-\infty) | 0 \rangle = \sqrt{2\omega} q(-\infty) \psi_0(q(-\infty))$$

$$\Rightarrow \langle 0; +\infty | 1; -\infty \rangle = \sqrt{2\omega} \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt (p\dot{q} - H + p \cdot q) \right] \psi_0^*(q(+\infty)) q(-\infty) \psi_0(q(-\infty))$$

Entonces, ¿cómo obtengo ese $q(-\infty)$ desde $W_0[\varphi]$? Con derivadas funcionales. Veámoslo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} W_0[\varphi] &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t-t) q(t) \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt (p\dot{q} - H + p \cdot q) \right] \psi_0^*(q(+\infty)) \psi_0(q(-\infty)) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt (p\dot{q} - H + p \cdot q) \right] \psi_0^*(q(+\infty)) q(t) \psi_0(q(-\infty)) \end{aligned}$$

donde tomando el límite $t \rightarrow -\infty$ conseguimos exactamente lo que queremos.

$$\therefore \lim_{t' \rightarrow -a} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t)} W_0[f] \propto \langle 0, +\infty | 1; -\infty \rangle$$

Para obtener $\langle 1; +\infty | 0; -\infty \rangle$ es exactamente lo mismo, pero tomando el límite a $+\infty$

$$\langle 1; +\infty | 0; -\infty \rangle = \lim_{t'' \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t'')} W_0[f(t)]$$

Tomemos la derivada para $\langle 0 | 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \lim_{t' \rightarrow -a} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t)} \exp \left[\frac{i}{2} \int_{-a}^{\infty} dt dt' f(t) G(t-t') f(t') \right] &= \lim_{t' \rightarrow -a} W_0[f] \int_{-a}^{\infty} dt f(t) G(t-t') \\ &= \lim_{t' \rightarrow -a} W_0[f] \left[\frac{i}{2\omega} \int_{-a}^{\infty} dt f(t) \theta(t-t') e^{-i\omega(t-t')} + \frac{i}{2\omega} \int_{-a}^{\infty} dt f(t) \theta(t'-t) e^{+i\omega(t-t')} \right] \\ &= \lim_{t' \rightarrow -a} W_0[f] \left[\frac{i}{2\omega} \int_{t'}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega(t-t')} + \frac{i}{2\omega} \int_{-a}^{t'} dt f(t) e^{+i\omega(t-t')} \right] \end{aligned}$$

donde para $t' \rightarrow -\infty$ el segundo término es 0

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{W_0[f]} \lim_{t' \rightarrow -a} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t')} W_0[f] &= \frac{i}{2\omega} e^{+i\omega t'} \int_{-a}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{i}{2\omega} e^{i\omega t'} \tilde{f}(\omega) \end{aligned}$$

$$\therefore \langle 0; +\infty | 1; -\infty \rangle = \lim_{t' \rightarrow -a} \frac{i}{2\omega} e^{i\omega t'} \tilde{f}(\omega) \exp \left[-\frac{1}{4\omega} |\tilde{f}(\omega)|^2 \right]$$

