Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 18

SRNI II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

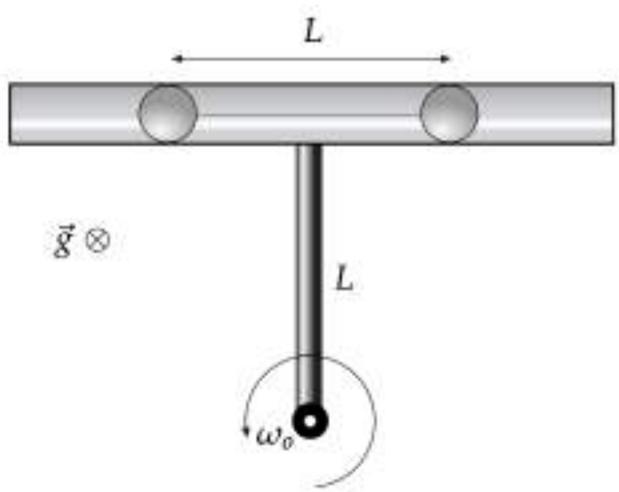
P1.-

Considere una estructura horizontal formada por un tubo de largo $2L$, y una barra de largo L, que gira con velocidad angular constante ω_0 con respecto a un eje vertical, en la forma indicada en la Figura. En el interior del tubo se encuentran dos partículas de masa m cada una, unidas por una cuerda de largo L, y **en equilibrio respecto al tubo**. No hay roce.

a) Determine la tensión de la cuerda en la condición de equilibrio

b) Si en cierto instante la cuerda se rompe, calcule la velocidad de ambas partículas, relativas al tubo, en el instante que escapan de él

c) Calcule la velocidad absoluta de ambas partículas en ese instante



P2.-

Una cuña de ángulo α respecto de la horizontal se ubica sobre una plataforma que rota con velocidad angular constante Ω respecto de un eje vertical que pasa por un punto P, como muestra la figura. Una partícula de masa m es liberada sobre la cuña partiendo su movimiento desde el reposo relativo a la cuña y su movimiento es descrito con respecto al sistema móvil $S' = \{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ indicado en la figura, cuyo origen se ubica en la posición inicial de la partícula sobre la cuña. Considere en este problema que pueden despreciarse todas las fuerza inerciales **excepto la fuerza de Coriolis**. Se pide:

a) Escribir la ecuación de movimiento de la partícula en sus 3-componentes x', y', z' del sistema de referencia móvil S'

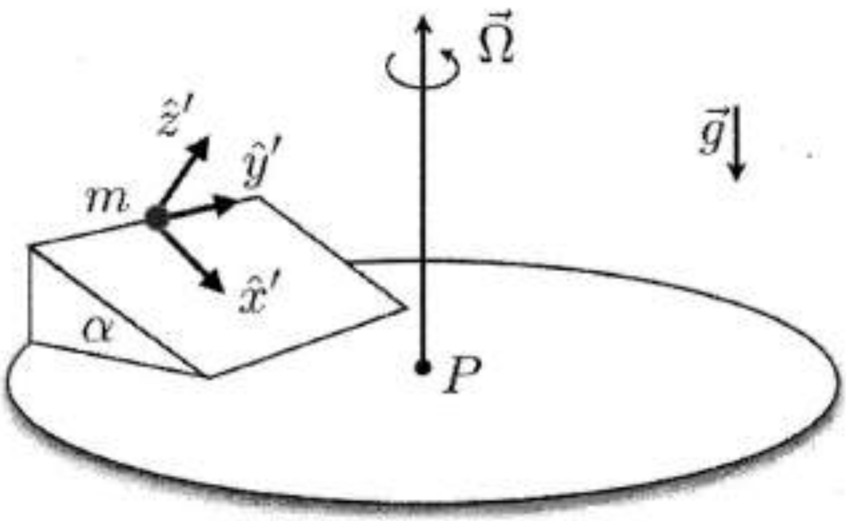
b) Resolver las ecuaciones, encontrando $x'(t)$ e $y'(t)$. Ver indicación de más abajo

c) Esquematizar la trayectoria de la partícula sobre la cuña. Determinar el máximo descenso y la máxima rapidez (relativa) de la partícula en su movimiento

Indicación: La ecuación diferencial $\dddot{u} = A - \omega_0^2 \dot{u}$, con A y ω_0 constantes, tiene por solución general:

$$u(t) = \frac{A}{\omega_0^2} t + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3,$$

donde las constantes C_i se determinan según condiciones iniciales $u(0)$, $\dot{u}(0)$, $\ddot{u}(0)$



Formulario

Sistemas de referencia no inerciales

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

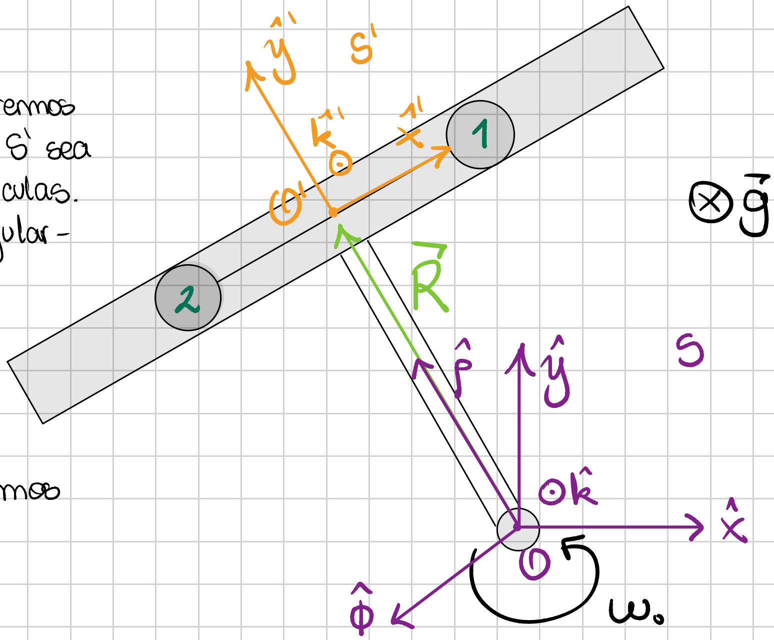
$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula;
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S';
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes **cartesianos** de S' c/r a los de S; y
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Auxiliar 18

P1



En este curso ocuparemos SRNI cuando encontremos un problema en el que ocupando un sist. de coord. S' sea bastante fácil describir el movimiento de las partículas. Sin embargo, este sist. S' que elegimos rota angularmente, $\vec{\Omega}$ y $\dot{\vec{\Omega}}$, o se traslada aceleradamente, $\ddot{\vec{R}}$, con respecto a un sist. inercial S.

En este problema notamos que trabajando con S' las partículas solo se moverían en $\hat{x}'$, pero S' está girando c/r a S, por lo que si queremos encontrar la ec. de mov. visto desde S', o sea

$$m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i'$$

tenemos que ocupar la fórmula maestra de esta unidad

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}_{tot} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' \quad (1)$$

donde $\dot{\vec{r}}', \ddot{\vec{r}}'$ se calculan como derivadas estándar de $\vec{r}'$

* Como los ejes unitarios de S' se mueven de forma no-inercial, a priori, ya no se tiene, por ej., $\dot{\hat{x}}' = \vec{0}$. No obstante, estos cambios en las derivadas temporales ya está considerado en (1), lo que da origen a la aparición de las fuerzas ficticias

Aunque estos problemas parezcan complicados por la forma de (1), todos se pueden abordar de la siguiente forma:

1) Definir S' y $\vec{r}'$, junto con las derivadas del último

2) Expresar $\vec{R}$ y derivarlo dos veces

3) Definir la velocidad angular $\vec{\Omega}$

4) Calcular las fuerzas reales $\vec{F}_{tot}$

5) Pasar todos los vectores de S a la base de S'

6) Calcular cada término de la fórmula maestra

a) Empecemos (sin siquiera saber qué nos piden)

▹ 1er paso: S' y $\vec{r}\,'$

Ya definimos la base de $S' = \{\hat{x}', \hat{y}'\}$, expresada en la Figura. Ahora, tenemos 2 partículas y sus posiciones estarían simplemente dadas por

$$\vec{r}_1\,' = x_1'\,\hat{x}' \quad , \qquad \vec{r}_2\,' = x_2'\,\hat{x}$$

y sus derivadas: $\dot{\vec{r}}_i\,' = \dot{x}_i'\,\hat{x}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_i\,' = \ddot{x}_i'\,\hat{x}'$

▹ 2do paso: $\vec{R}$

$\vec{R}$ se define como un vector que va desde O hasta O', en este caso

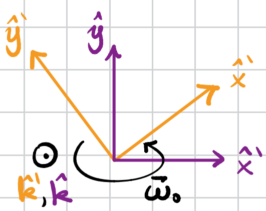
$$\vec{R} = L\,\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = L\dot{\phi}\,\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = L\ddot{\phi}\,\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\,\hat{\rho}$$

donde, por def. de cómo gira la plataforma, sabemos que $\dot{\phi} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$, entonces $\ddot{\vec{R}} = -L\omega_0^2\,\hat{\rho}$

▹ 3er paso: $\vec{\Omega}$

Acá un punto importante. La velocidad ang. $\vec{\Omega}$ se define como la velocidad ang. con la que gira un sist. cartesiano solidario a S', c/r a un sist. cartesiano definido en S.

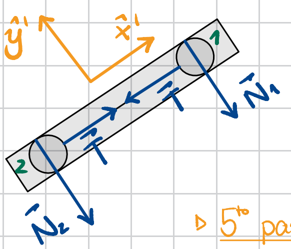
Entonces, solapamos ambos sist. cartesianos e identificamos como rotan (como en la Figura de la derecha), entonces, por regla de la mano derecha,



$$\vec{\Omega} = \omega_0\,\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$

▹ 4to paso: $\vec{F}_{tot}$

Sabemos que no hay mov. en $\hat{k} = \hat{k}'$, por lo que ignoramos la gravedad. Las únicas dos fuerzas que dan dinámica al problema son:



▹ Normal: $\vec{N}_i = -N_i\,\hat{y}'$

▹ Tensión: $\vec{T}_1 = -T\,\hat{x}'$, $\vec{T}_2 = T\,\hat{x}'$

▹ 5to paso: $S \longrightarrow S'$

Queremos reemplazar en (1) con únicamente vectores en el sist. $S' = \{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$. Sin embargo, $\ddot{\vec{R}}$ y $\vec{\Omega}$ lo tenemos en la base de S.

Fácilmente notamos que $\forall t$ $\hat{k}' = \hat{k}$ y de la primera figura (solapando los sistemas) tenemos las otras 2 relaciones: $\hat{y}' = \hat{\rho}$, $\hat{x}' = -\hat{\phi}$. Reemplazando,

$$\ddot{\vec{R}} = -L\omega_0^2\,\hat{y}' \quad , \qquad \vec{\Omega} = \omega_0\,\hat{k}'$$

▹ 6to paso: Reemplazar

Hay que calcular cada término de (1). Lo haré para la masa 1, mientras que para la masa 2 es casi idéntico

- $m\ddot{\vec{r}}_1' = m\ddot{x}_1'\hat{x}'$
- $\vec{F}_{rot} = \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = -N_1\hat{y}' - T\hat{x}'$
- $-m\ddot{\vec{R}} = mL\omega_0^2\hat{y}'$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}_1') = -m\omega_0\hat{k}'\times(\omega_0\hat{k}\times x_1'\hat{x}')$

$$= -m\omega_0^2 x_1'\hat{k}'\times\hat{y}'$$

$$= m\omega_0^2 x_1'\hat{x}'$$

- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}_1' = -2m\omega_0\hat{k}'\times\dot{x}_1'\hat{x}'$

$$= -2m\omega_0\dot{x}_1'\hat{y}'$$

- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}_1' = \vec{0}$

$$\therefore\ m\ddot{x}_1' = -N_1\hat{y} - T\hat{x}' + mL\omega_0^2\hat{y}' + m\omega_0^2 x_1'\hat{x}' - 2m\omega_0\dot{x}_1'\hat{y}'$$

de donde las EdMs escalares serían

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}')\quad & m\ddot{x}_1' = -T + m\omega_0^2 x_1' \quad (2) \\ \hat{y}')\quad & 0 = -N_1 + mL\omega_0^2 - 2m\omega_0\dot{x}_1' \quad (3) \end{aligned}\right\}\text{Partícula 1}$$

Mientras que para 2 basta con hacer $T\to -T$ y $N_1 \to N_2$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}')\quad & m\ddot{x}_2' = T + m\omega_0^2 x_2' \quad (4) \\ \hat{y}')\quad & 0 = -N_2 + mL\omega_0^2 - 2m\omega_0\dot{x}_2' \quad (5) \end{aligned}\right\}\text{Partícula 2}$$

Ahora, nos piden calcular T en la posición de equilibrio t.q.

$$\dot{x}_i' = \ddot{x}_i' \overset{!}{=} 0\,, \quad x_1' - x_2' \overset{!}{=} L$$

entonces usamos (2) y (4)

$$L = x_1' - x_2' = \frac{1}{m\omega_0^2}\cdot 2T \quad\Rightarrow\quad \boxed{T = \frac{m\omega_0^2 L}{2}}$$

b) Como se corta la cuerda $\Rightarrow T = 0$, así que podemos resolver (2) con C.I.

$$x_1'(0) = L/2\,, \quad \dot{x}_1' = 0 \qquad \text{(no se le da velocidad inicial)}$$

entonces

$$\ddot{x}_1' = \dot{x}_1'\frac{d\dot{x}_1'}{dx_1'} = \omega_0^2 x_1' \quad // \int dx_1'$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\dot{x}_1'} \dot{x}_1' \, d\dot{x}_1' = \omega_0^2 \int_{L/2}^{x_1'} x_1' \, dx_1'$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_1'^2 = \omega_0^2 \left(x_1'^2 - \frac{L^2}{4} \right)$$

y queremos saber la velocidad en $x_1' = L$. Reemplazamos

$$\dot{x}_{1f}'^2 = \dot{x}_1'^2 (x_1' = L) = \frac{3}{4} \omega_0^2 L^2$$

Notamos que para 2 obtendríamos lo mismo (hagan el cálculo) así que concluimos que

$$\boxed{\dot{\vec{r}}_{1f}' = \dot{x}_{1f}' \hat{x}' = +\frac{\sqrt{3}}{4} \omega_0 L} , \quad \boxed{\dot{\vec{r}}_{2f}' = \dot{x}_{2f}' \hat{x}' = -\frac{\sqrt{3}}{4} \omega_0 L \hat{x}'} \quad (6)$$

c) Ocupamos la fórmula

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \dot{\vec{R}}$$

que para 1 sería

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{x}_1' \hat{x}' + \omega_0 \hat{k}' \times x_1' \hat{x}' - L\omega_0 \hat{x}'$$

$$= \dot{x}_1' \hat{x}' + \omega_0 x_1' \hat{y}' - L\omega_0 \hat{x}'$$

y escrito en la base de S

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \omega_0 x_1' \hat{\rho} + (L\omega_0 - \dot{x}_1') \hat{\phi}$$

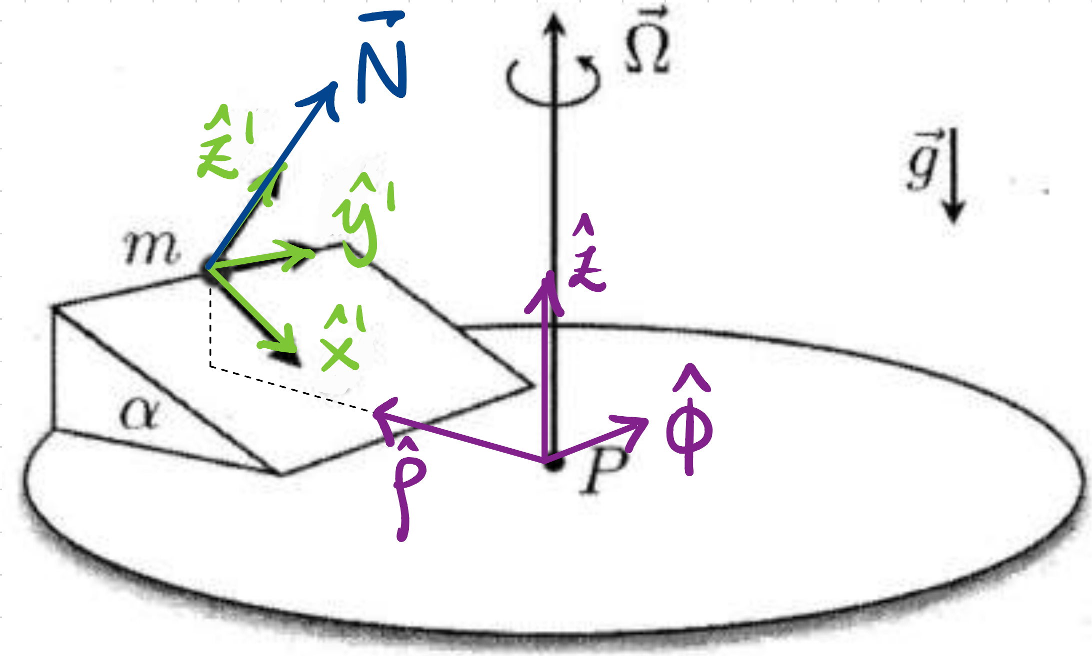
reemplazando con $x_1' = L$ y (6)

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{r}}_{1f} = \omega_0 L \hat{\rho} + \omega_0 L \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hat{\phi}}$$

y para 2 con $x_2' = -L$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{r}}_{2f} = -\omega_0 L \hat{\rho} + \omega_0 L \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hat{\phi}}$$

P2



Debido a las indicaciones del enunciado, ahora la ec. maestra sería:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \sum_i \vec{F}_i - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Ocuparemos los mismos pasos de antes.

▷ 1er paso: S' y $\vec{r}'$

Ocupamos el sistema S' impuesto. Tendríamos que la posición de la partícula es

$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}'$$

▷ 2do paso: $\vec{R}$

Debido al movimiento circular de la rampa, conviene definir nuestro sistema inercial S como un sist. cilíndrico con $\hat{\rho}$ apuntando en el plano $\hat{x}'-\hat{z}'$ (ver figura)
Sin embargo, despreciaremos la contribución de $\ddot{\vec{R}}$. Esto lo pueden pensar como

$$\vec{R} = R\hat{\rho} + h\hat{k} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\Omega^2\hat{\rho}$$

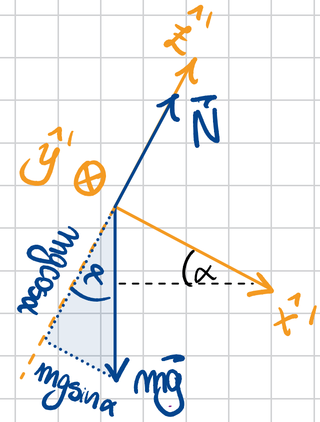
donde $\ddot{\vec{R}} \approx \vec{0}$ si $R \ll 1$.

- **3er paso: $\vec{\Omega}$**

Solapando los sist. cartesianos de O' y O es fácil notar que hay un Ω no nulo, en particular es

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$$

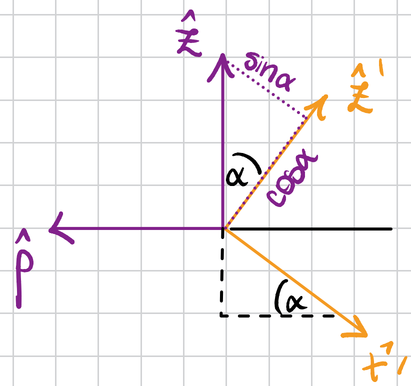
- **4to paso: $\vec{F}_i$**



Solo hay fuerza normal y peso, que en el sist. $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ serían:

- Normal: $\vec{N} = N\hat{z}'$
- Peso: $m\vec{g} = mg\sin\alpha\,\hat{x}' - mg\cos\alpha\,\hat{z}'$

- **5to paso: S a S'**



Lo único que tenemos que pasar a S' es $\vec{\Omega}$.
Ocupando el dibujo de la derecha

$$\hat{z} = -\sin\alpha\,\hat{x}' + \cos\alpha\,\hat{z}'$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = -\Omega\sin\alpha\,\hat{x}' + \Omega\cos\alpha\,\hat{z}'$$

- **6to paso: Ec. maestra**

Reemplacemos todo en nuestra nueva ec. maestra

- $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{x}'\hat{x}' + m\ddot{y}'\hat{y}'$
- $\sum_i \vec{F}_i = N\hat{z}' + mg\sin\alpha\,\hat{x}' - mg\cos\alpha\,\hat{z}'$
- $2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\Omega\left(-\sin\alpha\,\hat{x}' + \cos\alpha\,\hat{z}'\right)\times\left(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}'\right)$

$$= 2m\Omega\left(-\dot{y}'\sin\alpha\,\hat{z}' + \dot{x}'\cos\alpha\,\hat{y}' - \dot{y}'\cos\alpha\,\hat{x}'\right)$$

juntando todo

$$m\ddot{x}'\hat{x}' + m\ddot{y}'\hat{y}' = N\hat{z}' + mg\sin\alpha\,\hat{x}' - mg\cos\alpha\,\hat{z}' + 2m\Omega\dot{y}'\cos\alpha\,\hat{x}' - 2m\Omega\dot{x}'\cos\alpha\,\hat{y}' + 2m\Omega\dot{y}'\sin\alpha\,\hat{z}'$$

y las ec. escalares son:

$\hat{x}'$) $m\ddot{x}' = mg\sin\alpha + 2m\Omega\dot{y}'\cos\alpha$

$\hat{y}'$) $m\ddot{y}' = -2m\Omega\dot{x}'\cos\alpha$

$\hat{z}'$) $0 = N - mg\cos\alpha + 2m\Omega\dot{y}'\sin\alpha$

b) Queremos encontrar las soluciones $x'(t)$ y $y'(t)$, pero $\hat{x}'$) y $\hat{y}'$) son EDOs acopladas. Derivemos la EDO $\hat{x}'$)

$$\dddot{x}' = 2\Omega\, \ddot{y}' \cos\alpha$$

y reemplacemos con $\hat{y}'$)

$$\dddot{x}' = 2\Omega\cos\alpha \cdot (-2\Omega\cos\alpha\, \dot{x}')$$

$$= -4\Omega^2\cos^2\alpha\, \dot{x}' \quad (1)$$

que por indicación tiene solución

$$x'(t) = C_{1x}\cos(2\Omega\cos(\alpha)\cdot t) + C_{2x}\sin(2\Omega\cos(\alpha)\cdot t) + C_{3x} \quad (2)$$

Como parte del reposo $\dot{x}'(t=0) = 0$ y desde el origen $x'(t=0) = 0$, además por $\hat{i}'$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t=0) = g\sin\alpha$$

Impongamos C. I. en (2)

- $x'(t=0) = 0 = C_{1x} + C_{3x} \Rightarrow C_{1x} = -C_{3x}$
- $\dot{x}'(t=0) = 0 = 2\Omega\cos\alpha\, C_{2x} \Rightarrow C_{2x} = 0$
- $\ddot{x}'(t=0) = g\sin\alpha = -4\Omega^2\cos^2\alpha\, C_{1x} \Rightarrow C_{1x} = -\dfrac{g\sin\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}$

$$\therefore\ x'(t) = \frac{g\sin\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}\left(1 - \cos(2\Omega\cos(\alpha)\cdot t)\right)$$

Hacemos algo similar con $y'(t)$

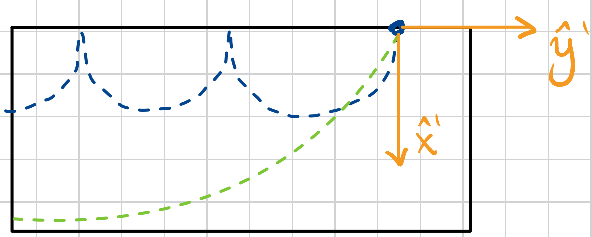
$$\dddot{y}'(t) = -2\Omega\cos\alpha\, \ddot{x}'$$

$$= -2\Omega g\cos\alpha\sin\alpha - 4\Omega^2\cos^2\alpha\, \dot{y}'$$

$$= A - \omega_0^2\, \dot{y}'$$

bla bla $\quad y'(t) = -\dfrac{g\sin\alpha}{2\Omega\cos\alpha}\cdot t + \dfrac{g\sin\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}\sin(2\Omega\cos(\alpha)\cdot t)$

c)



El máximo descenso, viendo $\dot{x}(t)$, es cuando $\cos(2\Omega\cos\alpha \cdot t^{*}) = -1$ y para la rapidez

$$\|\vec{v}(t)\|^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \frac{g^2\sin^2\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha} - \frac{g^2\sin^2\alpha}{2\Omega^2\cos^2\alpha}\cos(2\Omega\cos(\alpha)\cdot t) + \frac{g^2\sin^2\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}$$

que es máxima en el mismo tiempo $\cos(2\Omega\cos(\alpha)\cdot t^{**}) = -1$.