

Auxiliar 12

Teoría efectiva continua

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliar: Javier Huenupí

P1.-

Considere un Lagrangiano en $d = 4$ de un campo *light* ϕ_L interactuando con un campo *heavy* ϕ_H , dado por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi_L)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_L^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi_H)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi_H^2 - \frac{\lambda_L}{4!}\phi_L^4 - \frac{\lambda_H}{4!}\phi_H^4 - \frac{\lambda_{HL}}{4}\phi_L^2\phi_H^2 - \frac{g}{2}\phi_H\phi_L^2,$$

donde $m \ll M$. Note que ϕ_L es invariante ante $\mathbb{Z}_2$, esto es $\phi_L \rightarrow -\phi_L$.

La idea de este problema será considerar experimentos de baja energía $E \ll M$, tal que podemos integrar los grados de libertad no-influyentes (del campo ϕ_H), y obtener una teoría efectiva para ϕ_L . A diferencia del *Wilsonian approach*, aquí no consideraremos un *hard cutoff* Λ_0 , sino que regularizaremos la teoría usando regularización dimensional.

- a) Utilizando las simetrías del Lagrangiano original, argumente que la teoría efectiva para ϕ_L debe tener la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}(\partial\phi_L)^2 - \frac{1}{2}\tilde{m}^2\phi_L^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4!}\phi_L^4 - \frac{1}{2}\frac{c_{6,1}}{M^2}\phi_L\Box^2\phi_L - \frac{1}{6!}\frac{c_{6,2}}{M^2}\phi_L^6 - \frac{1}{4!}\frac{c_{6,3}}{M^2}\phi_L^2\Box\phi_L^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^4}\right),$$

donde $\Box \equiv -\partial^2$, y $c_{i,j}$ son acoplamientos (adimensionales) emergentes de la integración de grados de libertad, con d la dimensión del operador. *Indicación:* puede ignorar la contribución de $\phi_L\Box^2\phi_L$ haciendo un re-escalamiento adecuado.

- b) Calcule $i\mathbb{V}_4$ y $i\mathbb{V}_6$ (diagramas 1PI con 4 y 6 patas externas ϕ_L respectivamente) a orden-árbol utilizando $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_{\text{eff}}$. De esta forma, encuentre las expresiones de $\tilde{\lambda}$, $c_{6,2}$, y $c_{6,3}$ en función de los parámetros de la teoría original: M , λ_L , g .
- c) Calcule la self-energy $i\Pi$ a orden 1-loop utilizando $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_{\text{eff}}$. De esta forma, encuentre $\tilde{m}^2$ en función de los parámetros de la teoría original: M , λ_L , g , λ_{HL} . Regularice las integrales de loops ocupando esquema $\overline{\text{MS}}$, $d = 4 - 2\epsilon$, y considerando los contratérminos Z para la teoría efectiva, como

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}Z(\partial\phi_L)^2 - \frac{1}{2}\tilde{m}^2Z\phi_L^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4!}\tilde{\mu}^{2\epsilon}Z^2\phi_L^4 + \dots$$

- d) Discuta cómo encontrar $\tilde{\lambda}$, $c_{6,2}$ y $c_{6,3}$ a orden 1-loop.

Auxiliar 12

P1

Consideraremos la teoría original de 2 campos escalares

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2} (\partial \phi_L)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_L^2 - \frac{1}{2} (\partial \phi_H)^2 - \frac{1}{2} M^2 \phi_H^2 - \frac{\lambda_L}{4!} \phi_L^4 - \frac{\lambda_H}{4!} \phi_H^4 - \frac{\lambda_{HH}}{4} \phi_L^2 \phi_H^2 - \frac{g}{2} \phi_H \phi_L^2$$

con $m \ll M$.

- a) Si estamos interesados en amplitudes de baja energía y que involucren (como partículas entrantes y salientes) únicamente partículas ϕ_L , nos gustaría tener una **teoría efectiva** que involucre únicamente ϕ_L , donde la influencia de ϕ_H estaría ya considerada en los couplings.

Por lo tanto, proponemos un Lagrangiano efectivo de la forma

$$S_{\text{eff}} = \int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}}, \text{ con } \mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_{d,i} \tilde{c}_{d,i} \mathcal{O}_{d,i}$$

con $\mathcal{O}$: todos los operadores (definidos únicamente con ϕ_L) que mantengan las simetrías del Lagrangiano original. Por lo tanto, es fácil notar que tendríamos

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \supset \frac{-1}{2} (\partial \phi_L)^2 - \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \phi_L^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4!} \phi_L^4$$

pero no son los únicos. Podemos considerar operadores con más campos, pero siempre considerando que sean escalares de Lorentz (los índices estén contraídos) y que sean invariantes ante $\phi_L \rightarrow -\phi_L$. También, tenemos que tener en cuenta la dimensión de estos operadores. Con $d=4$ tenemos

$$[\phi] = \frac{d}{2} - 1 = 1, \quad [\partial_\mu] = 1 \Rightarrow [\Box] = 2 \quad \text{con } \Box \equiv -\partial_\mu \partial^\mu$$

Así que armemos operadores empezando por los de dimensión 6 (no se pueden de 5 y de 4 solo está ϕ_L^4)

$$\{\mathcal{O}_{6,i}\} \ni \phi_L^2 \partial_\mu \partial^\mu \phi_L^2, \phi_L \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu \partial^\nu \phi_L, \phi_L^6$$

Como el Lagrangiano es dimensión $d=4$, estos operadores aparecerían en el Lagrangiano suprimidos por una escala de energía a la 2. Es esperable que esta escala de supresión sea M , lo que haría que operadores de dimensión más alta estén aún más suprimidos (por potencias mayores de M). Esto es un guess, pero se comprueba con los cálculos.

Finalmente, el Lagrangiano efectivo a orden más bajo (hasta $d=6$ para $\mathcal{O}_{d,i}$) sería

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi_i) = \frac{-1}{2} (\partial \phi_i)^2 - \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \phi_i^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4!} \phi_i^4 - \frac{1}{2} \frac{C_{6,1}}{M^2} \phi_i \square^2 \phi_i - \frac{1}{6!} \frac{C_{6,2}}{M^2} \phi_i^6 - \frac{1}{4!} \frac{C_{6,3}}{M^2} \phi_i^2 \square \phi_i^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^4}\right)$$

donde redefinimos los $\tilde{c}_{d,i}$ para hacer $c_{d,i}$ adimensionales.

Las reglas diagramáticas serán

$$\begin{aligned} \text{Diagrama 1} &= -i\tilde{\lambda}, & \text{Diagrama 2} &= -i \frac{C_{6,3}}{3M^2} [(p_1+p_2)^2 + (p_1-p_3)^2 + (p_1-p_4)^2] \\ \text{Diagrama 3} &= -i \frac{C_{6,2}}{M^2} \end{aligned}$$

mientras que la contribución de $c_{2,4}$ puede ser ignorada haciendo un re-escalamiento de los campos.

Por lo tanto, el diagrama 1PI iV_4 estaría dado por

$$iV_4^{\text{eff}}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -i\tilde{\lambda} - i \frac{C_{6,3}}{M^2} [(k_1+k_2)^2 + (k_1-k_3)^2 + (k_1-k_4)^2] + \dots$$

y el diagrama iV_6

$$iV_6^{\text{eff}}(\dots) = -i \frac{C_{6,2}}{M^2} + \dots$$

Ahora, para encontrar las expresiones de estos couplings efectivos, deberemos calcular estas mismas amplitudes, pero con el Lagrangiano original. Para $\mathcal{L}$ tenemos las reglas

$$\text{Diagrama 1} = -i\lambda_L, \quad \text{Diagrama 2} \rightarrow -i\lambda_H, \quad \text{Diagrama 3} \rightarrow -i\lambda_H, \quad \text{Diagrama 4} \rightarrow -ig$$

Entonces, a orden más bajo y considerando solo ϕ_L como patas externas, tenemos

$$\begin{aligned} iV_4^{\text{tree}}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} + \text{Diagrama 4} + \dots \\ &= -i\lambda_L + (-ig)^2 \left[\frac{-i}{(k_1+k_2)^2 + M^2} + \frac{-i}{(k_1-k_3)^2 + M^2} + \frac{-i}{(k_1-k_4)^2 + M^2} \right] + \dots \end{aligned}$$

donde consideramos $k_i \ll M$ (estamos en exp de bajas energías) y expandimos en Taylor

$$iV_4^{00} = -i\lambda_L + i \frac{g^2}{M^2} [3 - (k_1+k_2)^2 - (k_1-k_3)^2 - (k_1-k_4)^2] + \dots$$

Haciendo $V_4^{eff} = V_4^{00}$ obtenemos

$$-i\tilde{\lambda} - \frac{iC_{6,3}}{3M^2} [(k_1+k_2)^2 + (k_1-k_3)^2 + (k_1-k_4)^2] + \dots = -i\left(\lambda_L - \frac{3g^2}{M^2}\right) - i \frac{g^2}{M^2} [(k_1+k_2)^2 + (k_1-k_3)^2 + (k_1-k_4)^2] + \dots$$

$$\therefore \boxed{\tilde{\lambda} = \lambda_L - \frac{3g^2}{M^2}}, \quad \boxed{C_{6,3} = 3 \frac{g^2}{M^2}}$$

Mientras tanto, para iV_6 tenemos

$$iV_6^{00}(\dots) = \begin{array}{c} \text{Diagram: A vertex with two blue lines meeting at a point, connected by a red line to another vertex with two blue lines meeting at a point. The red line is labeled } \lambda_{HL} \text{ and the vertices are labeled } g. \end{array} + \text{permutaciones}$$

donde nos aprovechamos del hecho que iV_6^{eff} no depende del momentum, por lo que para este iV_6^{00} podemos fijar los momentum a cero $k_i = 0$ (o, que es lo mismo, hacer un Taylor de orden 0). De esta forma, tendríamos 6! de los diagrammas mostrados, donde habría que dividir por un factor $2^2 \cdot 2$ por la permutación de los pines azules unidos al mismo vértice, y por un 2 de permutar los vértices opuestos de g

Entonces

$$iV_6^{00} = (-ig)^2 (-i\lambda_{HL}) \left(\frac{-i}{M^2} \cdot \frac{-i}{M^2} \right) \cdot \frac{6!}{2^4} = -i 45 \lambda_{HL} \frac{g^2}{M^4}$$

$$\therefore \boxed{C_{6,2} = 45 \lambda_{HL} \frac{g^2}{M^2}}$$

b) Calcularemos la self-energy a orden 1-loop, por lo que ocuparemos reg. dim. para regularizar los integrales de loop. Consideraremos una dimensión $d = 4 - 2\epsilon$, y para la tea original tendríamos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi_L)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_L^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi_H)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi_H^2 - \frac{\lambda_L}{4!}\tilde{\mu}^{2\epsilon}\phi_L^4 - \frac{\lambda_H}{4!}\tilde{\mu}^{2\epsilon}\phi_H^4 - \frac{\lambda_{HL}}{4}\tilde{\mu}^{2\epsilon}\phi_L^2\phi_H^2 - \frac{g}{2}\tilde{\mu}^\epsilon\phi_H\phi_L^2$$

y la self-energy sería

$$i\Pi^{00}(k^2) = \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Loop with } \lambda_L \text{ and } k \text{ lines.} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Loop with } \lambda_{HL} \text{ and } k \text{ lines.} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Loop with } g \text{ and } k \text{ lines, labeled } l, k. \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 4: Loop with } g \text{ and } k \text{ lines, labeled } l, k. \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 5: Crossed lines with } k \text{ lines.} \end{array} + \mathcal{O}(2\text{-loops})$$

$$= -i\lambda_L \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-i}{l^2 + m^2} - i\lambda_{HL} \tilde{\mu}^{2\epsilon} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-i}{l^2 + M^2} + (-ig\tilde{\mu}^\epsilon)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-i}{(l+k)^2 + m^2} \frac{-i}{l^2 + M^2} + (-ig\tilde{\mu}^\epsilon)^2 \frac{-i}{M^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-i}{l^2 + m^2} + \dots$$

donde los diagramas 1, 2 y 4 son casi exactamente iguales (tienen las mismas integrales de loop) y para el 3 podemos seguir los pasos del capítulo 14. De esta forma obtenemos

$$i\Pi^{\text{eff}}(k^2) = i\frac{\lambda_L m^4}{32\pi^2} \left[\frac{-1}{\epsilon} - 1 + \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] + i\frac{\lambda_H M^2}{32\pi^2} \left[\frac{-1}{\epsilon} - 1 + \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$+ i\frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{-1}{\epsilon} + \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - 1 - \frac{k^2}{2M^2} - \frac{m^2}{M^2} \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^4}, \epsilon\right) \right] + i\frac{g^2}{32\pi^2} \frac{m^2}{M^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$- i(k^2 + m^2) + \mathcal{O}(2\text{-loops, couplings mayores})$$

donde para el contra-término simplemente tomamos $\mathcal{Z}=1$, ya que asumiremos que las divergencias ϵ^{-1} las eliminamos con el contra-término de $\mathcal{L}^{\text{eff}}$

Mientras tanto, para la teo. efectiva solo consideraremos

$$i\Pi^{\text{eff}}(k^2) = \text{diagrama de bucle} + \text{diagrama de cruz} + \mathcal{O}(2\text{-loops})$$

ya que el término $C_{\phi^2} \phi^2 \square \phi^2$ nos otorga diagramas de orden mayor a k^2 . Entonces, reescribiendo esta teoría con la inclusión de contra-términos y $\tilde{\mu}$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \mathcal{Z} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \mathcal{Z} \phi^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4!} \tilde{\mu}^{2\epsilon} \mathcal{Z}^2 \phi^4 + \dots$$

donde esperamos que $\mathcal{Z}=1+\dots$, por lo que podemos ignorarlo del tercer término. Entonces, la self-energy sería

$$i\Pi^{\text{eff}}(k^2) = -i\tilde{\lambda}\tilde{\mu}^{2\epsilon} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-i}{l^2 + \tilde{m}^2} = i\frac{\tilde{\lambda}\tilde{m}^4}{32\pi^2} \left[\frac{-1}{\epsilon} - 1 + \log\left(\frac{\tilde{m}^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] - i\mathcal{Z}(k^2 + \tilde{m}^2)$$

$$= i\frac{\tilde{\lambda}m^4}{32\pi^2} \left[\frac{-1}{\epsilon} - 1 + \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] - i\mathcal{Z}(k^2 + \tilde{m}^2)$$

donde hicimos $\tilde{m} \rightarrow m$ ya que hipotetizamos que son iguales, pero con correcciones de coupling.

De esta forma, tenemos que imponer que $\Pi^{\text{os}} = \Pi^{\text{eff}}$ y de esta forma encontrar $\tilde{m}$ (es el único parámetro de la teo. eff. que nos quedó). Asumiremos que $\mathcal{Z}$ elimina las divergencias ϵ^{-1} de ambos self-energy, entonces

$$\Pi^{\text{eff}}(k^2) \stackrel{!}{=} \Pi^{\text{os}}(k^2)$$

$$\Leftrightarrow -\mathcal{Z}k^2 - \mathcal{Z}\tilde{m}^2 + \frac{\tilde{\lambda}\tilde{m}^4}{32\pi^2} \left[-1 + \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] \stackrel{!}{=} -(k^2 + m^2) + \frac{\lambda_L m^4}{32\pi^2} \left[-1 + \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] + \frac{\lambda_H M^2}{32\pi^2} \left[-1 + \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right]$$

$$+ \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - 1 - \frac{k^2}{2M^2} - \frac{m^2}{M^2} \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \right] + \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{m^2}{M^2} \left[1 - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right]$$

donde notamos que si apagamos los couplings, entonces $\mathcal{Z}=1$, obtenemos $\tilde{m}^2 = m^2$. Notemos que si agrupamos los términos con $\log(m^2/\mu^2)$

$$\dots + \frac{m^2}{32\pi^2} \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \left[\hat{\lambda} + \frac{3g^2}{M^2} - \lambda_L \right] = 0$$

que tiene que ser 0, ya que a orden tree-level encontramos que $\hat{\lambda} = \lambda_L - 3g^2/M^2$. Considerando esto

$$-Zk^2 - Z\hat{m}^2 = -k^2 - m^2 + \frac{\lambda_{H_1} M^2}{32\pi^2} \left[-1 + \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right] + \frac{g^2}{16\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{k^2}{M^2}$$

donde para eliminar las dependencias de k^2 necesitamos

$$Z = 1 + \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{1}{M^2}$$

$$\Rightarrow \hat{m}^2 = \frac{1}{Z} \left(m^2 - \frac{1}{32\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \left[\lambda_{H_1} M^2 + 2g^2 \right] + \frac{\lambda_{H_1} M^2}{32\pi^2} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{1}{M^2} \right) \left(m^2 - \frac{1}{32\pi^2} \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \left[\lambda_{H_1} M^2 + 2g^2 \right] + \frac{\lambda_{H_1} M^2}{32\pi^2} \right)$$