Auxiliar 11

Sólido rígido, Lagrangiano y modos normales

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Javier Huenupi, Clemente Miranda
Ayudantes: Catalina Cerna, Giulianna Pesce

P1.- Sólido rígido

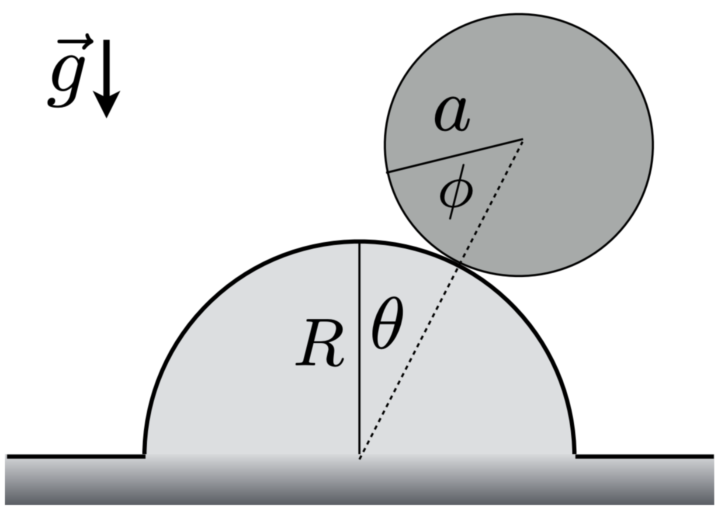
Un disco de radio a y masa M se encuentra en el punto más alto de un semicilindro de radio R fijo al suelo. El contacto entre el disco y el cilindro está caracterizado por un coeficiente de roce estático μ_e. En cierto instante, el disco es sacado de su punto de equilibrio y comienza a rodar sin resbalar sobre el semicilindro.

a) Escriba la segunda ley de Newton válida para la posición del centro de masas del disco mientras éste rueda sin resbalar. Deduzca expresiones para la fuerza normal y la fuerza de roce en función de θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

b) Determine la relación entre θ (el ángulo de la posición del centro de masas) y ϕ (el ángulo que describe la rotación del disco con respecto a la dirección $\vec{R}_{\text{cm}}/|\vec{R}_{\text{cm}}|$).

c) Determine expresiones para el momentum angular del disco y el torque sobre el disco con respecto al centro de masa del disco.

d) Determine la ecuación para el ángulo crítico θ_c donde el cilindro empieza a resbalar.

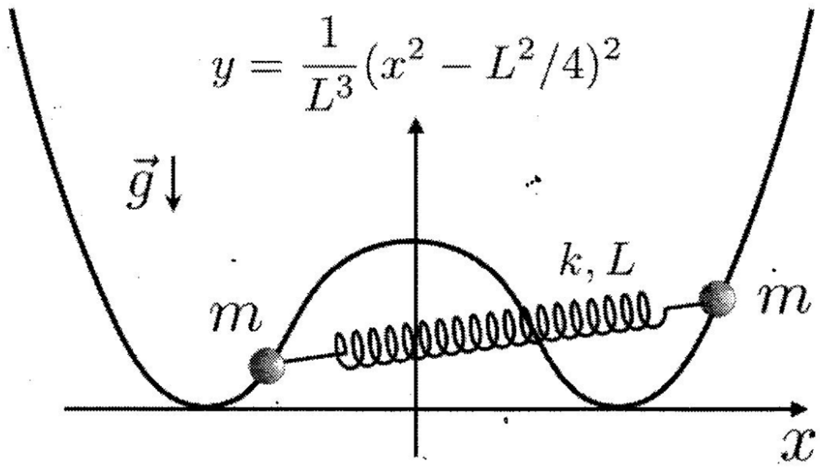


P2.- Lagrangiano y modos normales

Dos partículas de masa m están confinadas a moverse a lo largo de un alambre curvo descrito por la ecuación $y(x) = (x^2 - L^2/4)^2/L^3$. Estas permanecen comunicadas por medio de un resorte de largo natural L y constante elástica k, tal como lo muestra la figura. Se cumple que $m = kl/3g$.

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de pequeñas oscilaciones, en torno a los puntos de equilibrio $x_{\pm} = \pm L/2$

b) Determine los modos normales, junto con sus frecuencias



Formulario

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua de masa (no necesariamente homogénea), su tensor de inercia, tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$, se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m'$$

que también se puede escribir como

$$I^{ij}_{\mathcal{O}'} = \int (r'^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j) \, \mathrm{d}m' \ , \ \text{con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$, $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

El diferencial de masa se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico

$$\mathrm{d}m' = \lambda \, \mathrm{d}l' \,, \quad \mathrm{d}m' = \sigma \, \mathrm{d}A' \,, \quad \mathrm{d}m' = \rho \, \mathrm{d}V' \,.$$

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathcal{O}'}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}'},$$

donde $\vec{L}_{\mathcal{O}'}$ es el momentum angular medido con respecto al punto $\mathcal{O}'$ y $\vec{\tau}_{\mathcal{O}'}$ el torque medido con respecto al mismo punto.

El momentum angular tiene dos formas (equivalentes pero útiles en distintos contextos):

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\mathcal{O}'} &= M \vec{R}_{\mathrm{CM}} \times \dot{\vec{R}}_{\mathrm{CM}} + I_{\mathrm{CM}} \vec{\Omega}_{\mathrm{CM}} \\ &= I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega}_{\mathcal{O}'}, \end{aligned}$$

donde $\vec{R}_{\mathrm{CM}}$ es el vector posición que va desde $\mathcal{O}'$ hasta el CM, I_P el tensor de inercia calculado con respecto a algún punto P, y $\vec{\Omega}_P$ la velocidad angular del sólido medida con respecto a P.

La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\mathrm{tot}} \ddot{\vec{R}}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}^{\mathrm{ext}}$$

con $\vec{F}^{\mathrm{ext}} = \sum_i \vec{F}^{\mathrm{ext}}_i$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.

Lagrangiano

El lagrangiano L se calcula como

$$L = K - U,$$

donde K es la energía cinética y U la energía potencial del sistema. Se deben considerar todas las partículas del sistema.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se calculan como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

donde q es una coordenada generalizada, puede ser: $q = x$, $q = \theta$, $q = r$, etc. Estas ecuaciones nos dan las ecuaciones de movimiento del sistema.

Modos normales

De tener un sistema de ecuaciones de movimiento con forma de M.A.S. vectorial, como el siguiente:

$$\ddot{\vec{r}} + \Omega^2\,\vec{r} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{11}^2 & \Omega_{12}^2 & \cdots & \Omega_{1n}^2 \\ \Omega_{21}^2 & \Omega_{22}^2 & \cdots & \Omega_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1}^2 & \Omega_{n2}^2 & \cdots & \Omega_{nn}^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

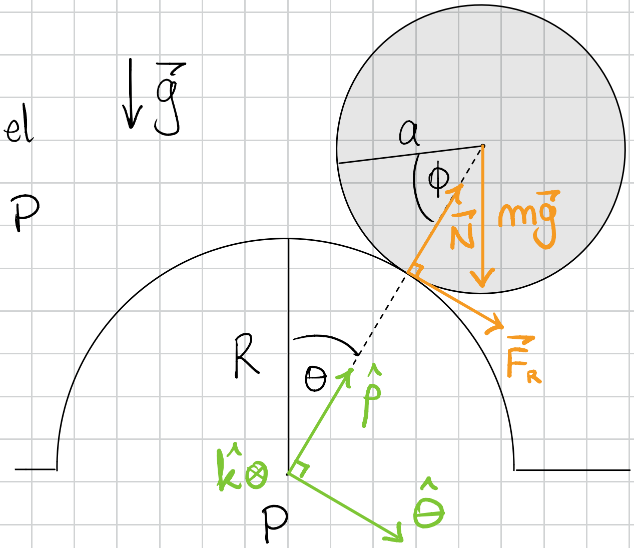
se pueden calcular sus modos normales de oscilación, que serían los autovalores de la matriz $\Omega_{n\times n}$. O sea, queremos encontrar los ω_i^2 que cumplen la ecuación de valores propios:

$$\left(\Omega_{n\times n}^2 - \omega_i^2 I_{n\times n}\right)\vec{v}_i = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Omega_{11}^2 - \omega_i^2 & \Omega_{12}^2 & \cdots & \Omega_{1n}^2 \\ \Omega_{21}^2 & \Omega_{22}^2 - \omega_i^2 & \cdots & \Omega_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1}^2 & \Omega_{n2}^2 & \cdots & \Omega_{nn}^2 - \omega_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ \vdots \\ v_{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auxiliar 11

P1



a) Para 2ª Ley de Newton es conveniente definir el origen del sist. en un punto fijo en el espacio. Utilizando coordenadas cilíndricas centradas en P tenemos que la aceleración del CM es

$$\vec{R}_{CM} = (R+a)\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = -(R+a)\dot{\theta}^2\hat{\rho} + (R+a)\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

Mientras que las fuerzas actuando sobre el cilindro son

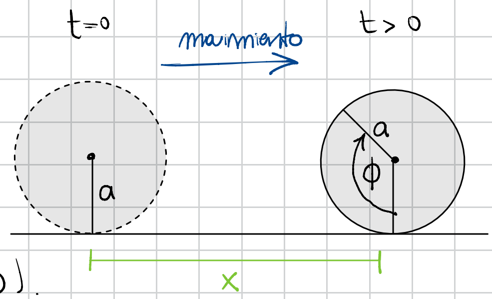
$$\sum_i \vec{F}_i^{\,ext} = N\hat{\rho} + F_R\hat{\theta} - Mg\cos\theta\hat{\rho} + Mg\sin\theta\hat{\theta}$$

entonces las EoM escalares serían

$$\hat{\rho})\quad -M(R+a)\dot{\theta}^2 = N - Mg\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \boxed{N(\theta,\dot{\theta}) = -M(R+a)\dot{\theta}^2 + Mg\cos\theta} \quad (1)$$

$$\hat{\theta})\quad M(R+a)\ddot{\theta} = F_R + Mg\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \boxed{F_R(\theta,\ddot{\theta}) = M(R+a)\ddot{\theta} - Mg\sin\theta} \quad (2)$$

* Ojo que, a diferencia del aux pasado, ahora $\vec{F}_R = +F_R\hat{\theta}$ positivo, ya que la fuerza de roce estática es la que permite que el cilindro avance rodando



b) Antes de encontrar la relación entre ϕ y θ, primero analicemos el caso del disco rodando en un plano horizontal (figura de la derecha).

En este caso tenemos que a la vez que el cuerpo avanza (una distancia x), este gira sobre su eje (un ángulo ϕ).
Como el cilindro rueda sin resbalar, lo que avanza en el plano debe ser igual al arco que subtiende el ángulo de giro, o sea

$$x = a\phi$$

Ahora, volviendo a nuestro problema, el arco del cilindro sigue siendo $a\cdot\phi$, pero ahora el cuerpo avanza en una superficie curva, que estaría dada por $(R+a)\theta$. Entonces, nuestra relación θ y ϕ es

$$\boxed{(R+a)\theta = a\phi}$$

y derivando obtenemos

$$\boxed{(R+a)\dot{\theta} = a\dot{\phi}} \quad \wedge \quad \boxed{(R+a)\ddot{\theta} = a\ddot{\phi}} \quad (3)$$

c) Queremos ocupar la relación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\,EXT}$$

donde para el momentum angular hay 2 fórmulas

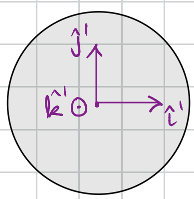
- $\vec{L}_O = M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{R}}_{CM} + I_{CM}\vec{\Omega}_{CM}$ vel. ang. c/r al CM
- $\vec{L}_O = I_O\vec{\Omega}_O$ vel ang. c/r al punto O

Usar una o la otra va a depender del problema. En este caso ocuparemos la segunda y con O en la posición del CM (al centro del cilindro), de esta forma el torque (que se tiene que calcular c/r al mismo punto) solo tendrá contribución de F_R.

★ Para ver un problema donde se ocupe la primera fórmula, les sugiero checkear la P3 del Examen 2023 de Gonzalo Palma

Ahora, para un disco homogéneo de masa M y radio a tenemos que su tensor de inercia medido c/r al CM es

$$I_{CM} = \begin{pmatrix} Ma^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & Ma^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & Ma^2/2 \end{pmatrix}$$



Vista de cómo se definieron los ejes para calcular I_{CM}

y por regla de la mano derecha podemos ver que el cuerpo rota c/r a $\hat{k}'$ en el sentido negativo, o sea

$$\vec{\Omega} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\phi} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{array}$$

Recordemos que definimos O = CM, entonces

$$\vec{L}_{CM} = -\frac{Ma^2}{2}\dot{\phi}\hat{k}' \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} = -\frac{Ma^2}{2}\ddot{\phi}\hat{k}'$$

Mientras que el torque solo tendría contribución de $\vec{F}_R = F_R\hat{\theta}'$, donde $\{\hat{\rho}', \hat{\theta}', \hat{k}'\}$ un sist. cilíndrico con origen en CM, así que

$$\vec{\tau}_{CM}^{\,ext} = a\hat{\rho}' \times F_R\hat{\theta}' = aF_R\hat{k}'$$

y juntando todo

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}^{\,ext}_{CM}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} M a^2 \ddot{\phi} = a F_R$$

y usando (3)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2} M (R+a)\ddot{\theta} = -F_R} \qquad (4)$$

d) El disco comienza a resbalar cuando $F_R = N\mu_e$ (recordar que el roce estático cumple que $F_R \leq N\mu_e$), así que tendremos que ocupar (1) y (2). Primero encontremos $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$, así que reemplacemos (4) en (2)

$$-\frac{1}{2} M (R+a)\ddot{\theta} = M(R+a)\ddot{\theta} - Mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{2g}{3(R+a)} \sin\theta \qquad \Big/ \int_0^\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{2g}{3(R+a)} \int_0^\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(R+a)} (1-\cos\theta)$$

que podemos reemplazar en (1)

$$\Rightarrow N(\theta) = -\frac{4MgR}{3(R+a)}(1-\cos\theta) + Mg\cos\theta$$

$$= Mg\frac{(7R+3a)}{3(R+a)}\cos\theta - \frac{4MgR}{3(R+a)}$$

mientras que (2) sería

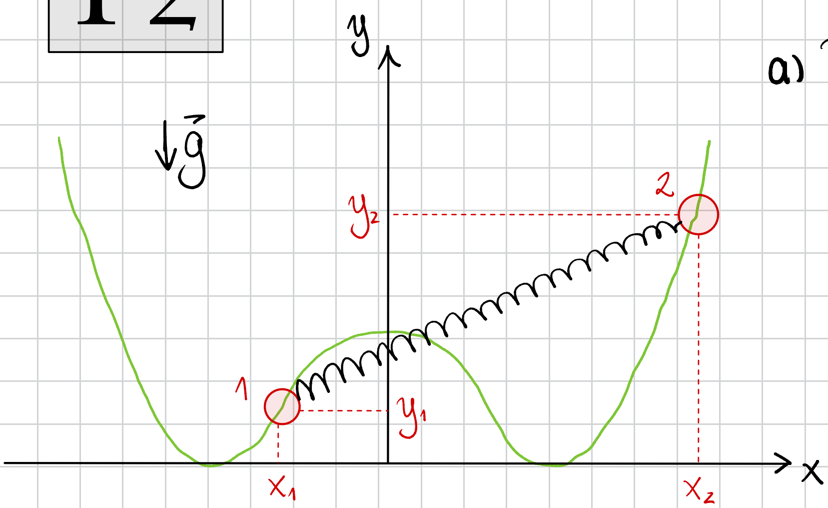
$$\Rightarrow F_R(\theta) = \frac{2MgR}{3(R+a)}\sin\theta - Mg\sin\theta$$

$$= -Mg\left(\frac{R+3a}{3(R+a)}\right)\sin\theta$$

y la imposición $F_R(\theta_c) \overset{!}{=} N(\theta_c)\mu_e$ sería

$$\boxed{-Mg\left(\frac{R+3a}{3(R+a)}\right)\sin\theta_c \overset{!}{=} Mg\mu_e\frac{(7R+3a)}{3(R+a)}\cos\theta_c - \frac{4MgR}{3(R+a)}}$$

P2



a) Para encontrar las ecs. de mov. ocuparemos Lagrangian. Y como nos piden los modos normales de oscilación, ocuparemos pequeñas perturbaciones para aproximar el Lagrangiano a segundo orden/grado para que las EoMs sean de primer orden, o sea que tengan la forma de un M.A.S.

Primero calculemos la energía cinética de cada partícula. Ocupando coordenadas cartesianas tendríamos

▷ $K_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$ ▷ $K_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$

pero como ambas partículas se mueven por el riel, la coordenada x está relaciona con y, de la forma

$$y = \frac{1}{L^3}(x^2 - L^2/4)^2 = \frac{1}{L^3}[(x + L/2)(x - L/2)]^2 \quad (1)$$

que es una relación algo complicada, por lo que empezaremos a aproximar. Por intuición los puntos de equilibrio estables están en $x = L/2, -L/2$ (en los puntos más bajos del riel), por lo que consideraremos que el punto de eq. de 1 es $x_{01} = -L/2$ y el de 2 $x_{02} = L/2$.

Ahora consideramos que ambas partículas se mueven, ligeramente, en torno a sus puntos de equilibrio, o sea

- $x_1(t) = -L/2 + \delta x_1(t)$,
- $x_2(t) = L/2 + \delta x_2(t)$, con $|\delta x_1|, |\delta x_2| << 1 \ \forall t$

Reemplacemos estas expresiones en (1) donde solo nos quedaremos con términos de hasta δx^2

- $$y_1 = \frac{1}{L^3}[(\cancel{-L/2} + \delta x_1 + \cancel{L/2})(-L/2 + \delta x_1 - L/2)]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}[\delta x_1^2 - \delta x_1 L]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}[\underbrace{\cancel{\delta x_1^4}}_{\text{orden 4}} - 2L\underbrace{\cancel{\delta x_1^3}}_{\text{orden 3}} + L^2 \delta x_1^2]$$
$$\approx \frac{1}{L}\delta x_1^2$$

$$\circ\ y_2 = \frac{1}{L^3}[(L/2+\delta x_2+L/2)(L/2+\delta x_2-L/2)]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}[\delta x_1^2 + L\delta x_1]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}[\underbrace{\cancel{\delta x_1^4}}_{\text{orden 4}} + 2L\underbrace{\cancel{\delta x_1^3}}_{\text{orden 3}} + L^2\delta x_1^2]$$
$$\approx \frac{1}{L}\delta x_1^2$$

Así que las derivadas temporales de y_i en función de x_i serían

$$\circ\ \dot{y}_1 = \frac{2}{L}\delta x_1 \delta\dot{x}_1 \qquad \circ\ \dot{y}_2 = \frac{2}{L}\delta x_2 \delta\dot{x}_2$$

que reemplazamos en la energía cinética

$$K = \sum_{i=1}^{2} K_i = \frac{1}{2}m\left(\delta\dot{x}_1^2 + \frac{4}{L^2}\delta x_1^2\delta\dot{x}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\delta\dot{x}_2^2 + \frac{4}{L^2}\delta x_1^2\delta\dot{x}_1^2\right)$$

sin embargo, notamos que las contribuciones de $\dot{y}_i^2$ son de la forma

$$\delta x^2 \delta\dot{x}^2$$

que es un término de orden 4, por lo que los despreciamos. Finalmente, la energía cinética sería

$$\boxed{K = \frac{1}{2}m\delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\delta\dot{x}_2^2}$$

Ahora vayamos por la energía potencial. Tenemos dos contribuciones:

- Potencial gravitatoria: $U_g = mgy$
- Potencial elástica: $U_e = \frac{1}{2}k(r-L)^2$

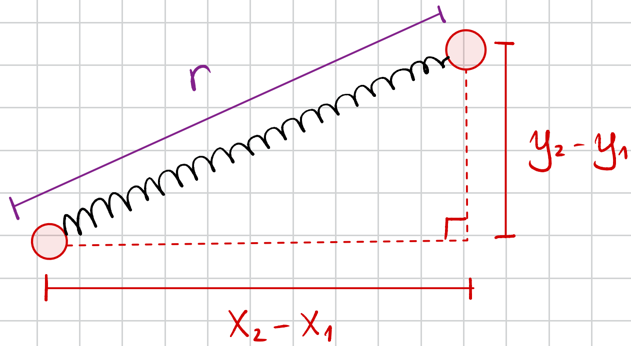
donde la gravitatoria total, en función de δx, sería

$$U_g = U_{g1} + U_{g2} = mgy_1 + mgy_2$$
$$= mg\frac{1}{L}\delta x_1^2 + mg\frac{1}{L}\delta x_2^2$$

que es una expresión de orden 2, así que no despreciamos nada.

Para la potencial elástica solo tenemos un resorte, por lo que será una sola contribución. Recordemos que el r de U_e es el largo del resorte, que geométricamente sería

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



que en función de las perturbaciones δx sería

$$r\approx\sqrt{\left(\frac{L}{2}+\delta x_2+\frac{L}{2}-\delta x_1\right)^2+\left(\frac{\delta x_2^2}{L}-\frac{\delta x_1^2}{L}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(L+\delta x_2-\delta x_1)^2+\frac{\delta x_2^4}{L^2}-\frac{2\,\delta x_1^2\,\delta x_2^2}{L^2}+\frac{\delta x_1^4}{L^2}} \quad (2)$$

Pensemos en (2) como una función de la forma $\sqrt{L^2+\epsilon}$, donde ϵ representaría la suma de todos los términos de (2) sin contar el L^2, y que cumple $\epsilon \ll 1$, entonces si expandimos hasta orden 1 en ϵ

$$\sqrt{L^2+\epsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sqrt{L^2+\epsilon}\right)^{(n)}\Big|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon^n\approx L+\frac{1}{2L}\epsilon$$

así que la energía elástica sería

$$U_e=\frac{1}{2}k(r-L)^2\approx\frac{1}{2}k\frac{\epsilon^2}{4L^2}$$

donde ϵ aparece al cuadrado, y como tiene expresión

$$\epsilon=2L\delta x_2-2L\delta x_1+\delta x_2^2+\delta x_1^2-2\delta x_1\delta x_2+\frac{\delta x_2^4}{L^2}-\frac{2\,\delta x_1^2\,\delta x_2^2}{L^2}+\frac{\delta x_1^4}{L^2}$$

solo sobrevivirán los términos de orden 1, ya que al cuadrado serían de orden 2
Entonces

$$U_e\approx\frac{1}{2}k\frac{1}{4L^2}4L^2(\delta x_2-\delta x_1)^2$$

$$=\frac{1}{2}k(\delta x_2-\delta x_1)^2,$$

que es una expresión de orden 2, como se desea.

Ya tenemos todo para expresar nuestro Lagrangiano cuadrático / orden 2

$$L=K-U=\frac{1}{2}m\delta\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\delta\dot{x}_2^2-mg\frac{1}{L}\delta x_1^2-mg\frac{1}{L}\delta x_2^2-\frac{1}{2}k(\delta x_2-\delta x_1)^2$$

y para calcular las EoMs usamos E-L. Primero para δx_1

▷ $$\frac{\partial L}{\partial \delta x_1}=-\frac{2mg}{L}\delta x_1+k(\delta x_2-\delta x_1)$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_1} = m\,\delta\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\%) = m\,\delta\ddot{x}_1$$

$$\therefore\quad \boxed{\delta\ddot{x}_1 + 2\frac{g}{L}\delta x_1 - \frac{k}{m}(\delta x_2 - \delta x_1) = 0} \quad (3)$$

Y para δx_2 sería

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \delta x_2} = -2\frac{mg}{L}\delta x_2 - k(\delta x_2 - \delta x_1)$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_2} = m\,\delta\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\%) = m\,\delta\ddot{x}_2$$

$$\therefore\quad \boxed{\delta\ddot{x}_2 + 2\frac{g}{L}\delta x_2 + \frac{k}{m}(\delta x_2 - \delta x_1) = 0} \quad (4)$$

donde (3) y (4) serían las EoMs de pequeñas oscilaciones.

b) Para calcular los modos normales de oscilación del sistema, tenemos que juntar (3) y (4) en una ec. matricial de la forma

$$\ddot{\vec{r}} + \Omega^2\vec{r} = 0$$

que en este caso sería

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2g/L + k/m & -k/m\\ -k/m & 2g/L + k/m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

que tomando $m = kL/3g$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5g/L & -3g/L\\ -3g/L & 5g/L\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Los modos normales están dados por los autovalores de la matriz de 2×2 que acompaña a $\vec{r}$. La ec. de valores propios sería

$$\begin{vmatrix}5g/L - w^2 & -3g/L\\ -3g/L & 5g/L - w^2\end{vmatrix} = (5g/L - w^2)^2 - (3g/L)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5gL - w^2 = \pm 3g/L$$

$$\Leftrightarrow w^2 = \frac{2g}{L}, \frac{8g}{L}$$

Con esto conseguimos las frecuencias de oscilación, pero también necesitamos los autovectores para saber el sentido de oscilación.

$\boxed{\omega^2 = 2g/L}$

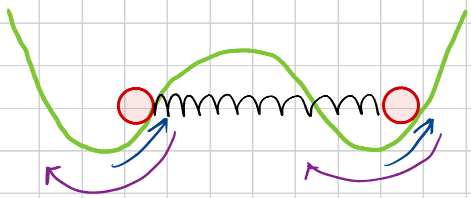
$$\begin{pmatrix} 5g/L - 2g/L & -3g/L \\ -3g/L & 5g/L - 2g/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3g}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ambas partículas oscilan en el mismo sentido

y normalizando

$$a_1 (1 \quad 1)\, a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



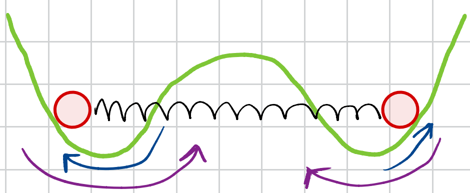
Y para la otra frecuencia

$\boxed{\omega^2 = 8g/L}$

$$-\frac{3g}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

las partículas oscilan en sentidos contrarios

y normalizando $a_2 = 1/\sqrt{2}$



* Nota: Al principio puede ser complicado esto de las aproximaciones. Con la práctica aprenderán hasta dónde deben aproximar una función para que al juntarlas con las otras, les quede una expresión de máximo grado 2.