Auxiliar 11

Simetrías continuas

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliar: Javier Huenupi

P1.-

Considere la corriente de Noether para una teoría de múltiples campos, dada por

$$j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \varphi_a(x))}\delta\varphi_a(x).$$

Asumiendo que $\delta\varphi_a$ no considera derivadas temporales, muestre que se cumple

$$[\varphi_a, Q] = i\delta\varphi_a,$$

donde Q es la carga de Noether, dada por

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0(x).$$

P2.-

Considere el grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(N)$ definido por las matrices $N \times N$ que cumplen

$$R^{\mathrm{T}} = R^{-1}, \quad \det(R) = +1.$$

Podemos considerar transformaciones infinitesimales de este grupo como

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \theta_{ij} + \mathcal{O}(\theta^2).$$

Usando esto, demuestre que θ_{ij} es antisimétrico, $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$.

Además, las matrices θ_{ij} pueden ser descompuestas en términos de los *generadores* de $\mathrm{SO}(N)$, como

$$\theta_{jk} = -i\theta^a (T^a)_{jk},$$

donde los generadores T^a son $\frac{1}{2}N(N-1)$ matrices $N \times N$ linealmente independientes, hermíticas y antisimétricas. Use esta descomposición y la transformación $R'^{-1}R^{-1}R'R$, donde R y R' son elementos infinitesimales de $\mathrm{SO}(N)$, para mostrar que

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c,$$

con f^{abc} factores numéricos conocidos como los *coeficientes de estructura* del grupo, y que especifican el *álgebra de Lie*.

Auxiliar 11

P1

Considerando una teoría arbitraria de múltiples campos, pero sin interacciones de derivadas temporales,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial \varphi_a)^2 - V(\{\varphi_a\})$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_0 \varphi_a)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i \varphi_a)^2 - V(\{\varphi_a\})$$

entonces el momentum conjugado es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_a)} = \partial_0 \varphi_a = \Pi_a(x) \quad \Rightarrow \quad j^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_a)} \delta\varphi_a = \Pi_a(x)\,\delta\varphi_a(x)$$

Calculamos su conmutación con $\varphi_a(x)$ (sabiendo que $[\varphi_a(x), \delta\varphi_b(y)] \overset{!}{=} 0$)

$$[\varphi_a(x), j^0(y)] = [\varphi_a(x), \Pi_b(y)]\,\delta\varphi_b(y) = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{ab}\,\delta\varphi_b(y)$$

e integrando con $\int d^3y$

$$\Rightarrow [\varphi_a(x), Q] = \left[\varphi_a(x), \int d^3y\, j^0(y)\right] = \int d^3y\,[\varphi_a(x), j^0(y)] = i\int d^3y\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{ab}\,\delta\varphi_b(y) = i\,\delta\varphi_a(x)$$

$$\therefore\ [\varphi_a(x), Q] = i\,\delta\varphi_a(x)$$

P2

Estamos interesados en los elementos del grupo especial ortogonal $SO(N)$, que consiste en matrices $N\times N$ que cumplen

- $R^T R = \mathbb{1}$, ortogonal
- $\det(R) = +1$, especial

Cualquier producto de estos elementos constituye otro elemento del grupo. Entonces, en particular, podemos obtener cualquier elemento del grupo a través del producto de varias transformaciones infinitesimales, del estilo

$$R = \mathbb{1} + \theta \iff R_{ij} = \delta_{ij} + \theta_{ij} \qquad (1)$$

con θ_{ij} matrices cuyos elementos (los "ángulos de rotación") son pequeños.

Notamos que para que (1) pertenezca a $SO(N)$, tiene que cumplir ortogonalidad

$$\begin{aligned} R^T R = (\mathbb{1}+\theta)^T(\mathbb{1}+\theta) &= [(\mathbb{1}+\theta)^T]_{ij}[\mathbb{1}+\theta]_{jk} \\ &= (\delta_{ji} + \theta_{ji})(\delta_{jk} + \theta_{jk}) \\ &= \delta_{ji}\cdot\delta_{jk} + \delta_{ji}\theta_{jk} + \delta_{jk}\theta_{ji} + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= \delta_{ik} + \theta_{ik} + \theta_{ki} \\ &\overset{!}{=} \delta_{ik} \quad \Rightarrow \theta_{ik} = -\theta_{ki} \end{aligned}$$

Ahora, utilizaremos R^{-1} a segundo orden, que está dado, en principio, por algo como $R^{-1} = \mathbb{1} - \theta + A + \mathcal{O}(\theta^3)$. Imponemos que sea la inversa

$$R^{-1}R = (\mathbb{1}-\theta+A)(\mathbb{1}+\theta) = \mathbb{1} - \theta + \theta + A - \theta\theta \overset{!}{=} \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow A = \theta\theta \Rightarrow R^{-1} = \mathbb{1} - \theta + \theta\theta$$

Consideremos la siguiente transformación sucesiva hasta segundo orden

$$\begin{aligned} R'^{-1}R^{-1}R'R &= (\mathbb{1} - \theta' + \theta'\theta')(\mathbb{1} - \theta + \theta\theta)(\mathbb{1}+\theta')(\mathbb{1}+\theta) \\ &= \mathbb{1} - \cancel{\theta'} + \cancel{\theta'\theta'} - \cancel{\theta} + \cancel{\theta\theta} + \cancel{\theta'} + \cancel{\theta} + \cancel{\theta'\theta} - \cancel{\theta'\theta'} - \cancel{\theta'\theta} - \theta\theta' - \cancel{\theta\theta} + \theta'\theta + \mathcal{O}(\theta^3) \\ &= \mathbb{1} - \theta\theta' + \theta'\theta \\ &= \mathbb{1} + [\theta', \theta] \end{aligned}$$

y si lo escribimos en función de generadores $\theta = \theta^a T^a$

$$\Rightarrow R'^{-1} R^{-1} R' R = \mathbb{1} + [\theta'^a T^a, \theta^b T^b]$$

$$= \mathbb{1} + \theta'^a \theta^b [T^a, T^b]$$

Ahora, esta transformación sucesiva da otro elemento de SO(N) que se puede escribir de la misma forma

$$R'^{-1} R^{-1} R' R \equiv R'' = \mathbb{1} + \theta'' = \mathbb{1} + \theta''^c T^c$$

$$\Rightarrow \mathbb{1} + \theta''^c T^c = \mathbb{1} + \theta'^a \theta^b [T^a, T^b]$$

$$\therefore [T^a, T^b] = \frac{\theta''^c}{\theta'^a \theta^b} T^c \equiv f^{abc} T^c$$