Auxiliar 10

Teoría efectiva y cutoffs

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliar: Javier Huenupi

P1.-

Considere una teoría φ^3 en espacio Euclideano $d = 6$, con cutoff Λ_0 y lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z(\Lambda_0)\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{1}{3!}Z^{3/2}(\Lambda_0)g(\Lambda_0)\varphi^3.$$

Asumiremos que podemos hacer un *fine-tunning* tal que $m^2(\Lambda) \ll \Lambda^2$, por lo que podemos despreciar el término de masa.

a) Muestre que

$$Z(\Lambda) = Z(\Lambda_0)\left(1 - \frac{1}{2}g^2(\Lambda_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k^2}\left[\int_\Lambda^{\Lambda_0}\frac{\mathrm{d}^6 l}{(2\pi)^6}\frac{1}{(k+l)^2 l^2}\right]_{k^2=0} + \dots\right),$$
$$g(\Lambda) = \frac{Z^{3/2}(\Lambda_0)}{Z^{3/2}(\Lambda)}g(\Lambda_0)\left(1 + g^2(\Lambda_0)\int_\Lambda^{\Lambda_0}\frac{\mathrm{d}^6 l}{(2\pi)^6}\frac{1}{(l^2)^3} + \dots\right).$$

Hint: Note que a tree-level el propagador de Feynman es $\tilde{\Delta}(k) = \left[Z(\Lambda_0)k^2\right]^{-1}$.

b) Use este resultado par calcular la beta function

$$\beta(g(\Lambda)) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\Lambda}g(\Lambda)$$

y compare con el resultado del capítulo *Other renormalization schemes*

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\ln\mu} = -\frac{3}{2}\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

Auxiliar 10

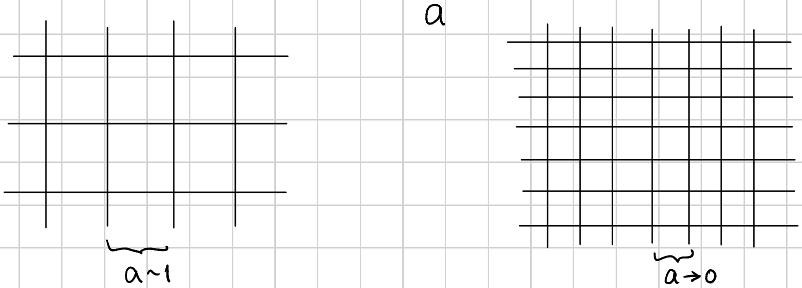
P1

Consideramos la teoría d=6 Euclidea con un cutoff "natural"

$$\mathcal{L}_{eff}(\varphi;\Lambda_0) = +\frac{1}{2}Z(\Lambda_0)\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi + \frac{1}{3!}Z^{3/2}(\Lambda_0)\,g(\Lambda_0)\,\varphi^3 \quad (1)$$

Este cutoff Λ_0 determina el límite de validez de nuestra teoría y que normalmente lo consideramos como el inverso de la grilla que define nuestro espacio-tiempo

$$\Lambda_0 \sim \frac{1}{a}$$



Por lo tanto al pasar de coordenadas a Fourier, como hay una distancia mínima, habría un momentum máximo $|k|<\Lambda_0$. Sin embargo, lo ideal es que Λ_0 sea grande para tener un rango interesante de energías para trabajar. Además, estaremos interesados en procesos de "baja energía", por lo que introduciremos un segundo cutoff Λ para integrar escalas $k\in[\Lambda,\Lambda_0]$. Luego haremos que los observables no dependan de Λ derivando e igualando a 0.

a) Nos piden $Z(\Lambda)$ y $g(\Lambda)$ definidos como

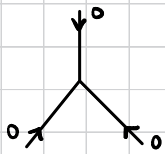
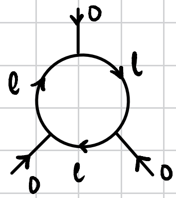
$$S_{eff}[\varphi;\Lambda,\Lambda_0] = \int d^5x\, d\overset{\tau=it}{\tau}\left[\frac{1}{2}Z(\Lambda)(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}Z^2(\Lambda)m^2(\Lambda)\varphi^2 + \frac{1}{3!}Z^{3/2}(\Lambda)g(\Lambda)\varphi^3\right]$$

donde

$$e^{-S_{eff}[\varphi;\Lambda,\Lambda_0]} = \int \mathcal{D}\varphi_{\Lambda<k<\Lambda_0}\, e^{-\int d^5x\,d\tau\,\mathcal{L}_{eff}(\varphi;\Lambda_0)} \quad (2)$$

con $\mathcal{L}_{eff}(\varphi;\Lambda_0)$ el lagrangiano efectivo de (1). Entonces, (2) tiene la forma de $e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS_{(J)}[\varphi]}$ donde $W[J]$ representaba todos los diagramas conectados generados por las interacciones de $S[\varphi]$. Así que podemos ocupar las mismas reglas diagramáticas para calcular los elementos de $S_{eff}[\varphi;\Lambda,\Lambda_0]$

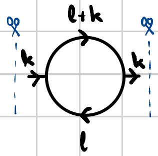
Empecemos con $-Z^{3/2}(\Lambda)g(\Lambda)$ que corresponde a todos los diagrama 1PI con momentum interno $k\in[\Lambda,\Lambda_0]$ y setteando el momentum externo a 0, $k_i=0$ (esto es, $-V_3(\vec{0},\vec{0},\vec{0})$) Para estos diagramas los vértices son de 3 líneas y con un factor $(-Z^{3/2}(\Lambda_0)g(\Lambda_0))$, y los propagadores de Feynman son $\tilde{\Delta}(k^2) = 1/Z^2(\Lambda)k^2$. Entonces

$$-Z^{3/2}(\Lambda)\, g(\Lambda) = $$  $+$  $+ \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0))$

$$= -Z^{3/2}(\Lambda_0)\, g(\Lambda_0) + \left(-Z^{3/2}(\Lambda_0)\, g(\Lambda_0)\right)^3 \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{Z^3(\Lambda_0)} \frac{1}{(l^2)^3} + \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0))$$

$$\Rightarrow \boxed{g(\Lambda) = \frac{Z^{3/2}(\Lambda_0)}{Z^{3/2}(\Lambda)}\, g(\Lambda_0) \left(1 + g^2(\Lambda_0) \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(l^2)^3}\right) + \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0))}$$

Ahora, para calcular $Z(\Lambda)$ usamos la relación $Z(\Lambda) = Z(\Lambda_0) - \Pi'(0)$. Calculemos la auto energía dada por

$$\Pi(k^2) = $$  $+ \mathcal{O}(g^4(\Lambda_0))$

$$= \frac{1}{2}\left(-Z^{3/2}(\Lambda_0)\, g(\Lambda_0)\right)^2 \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{Z^2(\Lambda_0)} \frac{1}{l^2 (l+k)^2} + \mathcal{O}(g^4(\Lambda_0))$$

Reescribamos el integrando con fórmula de Feynman

$$\frac{1}{l^2(l+k)^2} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \left[x_1 l^2 + x_2 (l+k)^2\right]^{-2} \delta(x_1 + x_2 - 1)$$

$$= \int_0^1 dx \left[(1-x) l^2 + x (l+k)^2\right]^{-2}$$

$$= \int_0^1 dx \left[\bar{q}^2 + D\right]^{-2}, \text{ donde } \bar{q}^2 \equiv l + x \cdot k \text{ y } D \equiv x(1-x)k^2$$

Derivamos esta expresión c/r a k^2 y tomamos $k^2 = 0$ (ya que queremos $\Pi'(0)$)

$$\frac{d}{dk^2} \int_0^1 dx \left[\bar{q}^2 + x(1-x)k^2\right]^{-2} \Big|_{k^2=0} = -2 \int_0^1 dx\, x(1-x) \left[\bar{q}^2 + x(1-x)k^2\right]^{-3} \Big|_{k^2=0} = -2 \int_0^1 dx\, x(1-x)\, (l^2)^{-3} = -\frac{1}{3} (l^2)^{-3}$$

$$\Rightarrow \Pi'(0) = -\frac{1}{6} Z(\Lambda_0)\, g^2(\Lambda_0) \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} (l^2)^{-3} + \mathcal{O}(g^4(\Lambda_0))$$

$$= -\frac{1}{6} Z(\Lambda_0)\, g^2(\Lambda_0) \int_\Omega \frac{d\Omega_6}{(2\pi)^6} \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} dl\, \frac{l^5}{l^6} + \mathcal{O}(g^4(\Lambda_0)), \quad \int_\Omega d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \Rightarrow \int_\Omega d\Omega_6 = \pi^3$$

$$= -\frac{1}{6} Z(\Lambda_0)\, g^2(\Lambda_0)\, \pi^3 \ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g^4(\Lambda_0))$$

Con lo que concluimos

$$\boxed{Z(\Lambda) = Z_0(\Lambda)\left(1 + \frac{g^2(\Lambda_0)}{6(4\pi)^3} \ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)\right) + \mathcal{O}(g^4(\Lambda_0))}$$

Recordamos que dejamos $g(\Lambda)$ en función de $\mathcal{Z}(\Lambda)$. Reemplacemos y expandamos en potencias de $g(\Lambda_0)$

resolvimos igual que antes

$$g(\Lambda) = \frac{g(\Lambda_0)}{\left(1+(g^2(\Lambda_0)/6(4\pi)^3)\ln(\Lambda_0/\Lambda)\right)^{3/2}}\left(1+\frac{g^2(\Lambda_0)}{(4\pi)^3}\ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)\right) + \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0))$$

$$= g(\Lambda_0)\left[\frac{1}{\left(1+(g^2(\Lambda_0)/6(4\pi)^3)\ln(\Lambda_0/\Lambda)\right)^{3/2}} + \frac{g^2(\Lambda_0)}{(4\pi)^3}\ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)\right] + \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0))$$

$$= g(\Lambda_0)\left[1+\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}+1\right)\frac{g^2(\Lambda_0)}{(4\pi)^3}\ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)\right] + \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0))$$

$$= g(\Lambda_0)\left[1+\frac{3}{4}\frac{g^2(\Lambda_0)}{(4\pi)^3}\ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)\right] + \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0)) \quad (3)$$

b) Calculemos la beta function

$$\beta(g(\Lambda)) \equiv \frac{dg(\Lambda)}{d\ln(\Lambda)} = -\frac{3}{4}\frac{g^3(\Lambda_0)}{(4\pi)^3} + \mathcal{O}(g^4(\Lambda_0))$$

y si formamos el parámetro $\alpha \equiv g^2/(4\pi)^3$ multiplicando (3) por $g(\Lambda)/(4\pi)^3$

$$\Rightarrow \frac{g^2(\Lambda)}{(4\pi)^3} = \frac{g^2(\Lambda_0)}{(4\pi)^3}\left[1+\frac{3}{4}\frac{g^2(\Lambda_0)}{(4\pi)^3}\ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)\right] + \mathcal{O}(g^5(\Lambda_0)) \equiv \alpha(\Lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha(\Lambda)}{d\ln(\Lambda)} = -\frac{3}{4}\alpha^2(\Lambda) + \mathcal{O}(\alpha^3(\Lambda)) \quad (4)$$

que es idéntica a lo encontrado antes (hay una diferencia de 2 que se puede arreglar tomando $\ln\mu = 2\ln\Lambda$)

Integrando (4) en $\Lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3}\int_{\alpha(\Lambda_1)}^{\alpha(\Lambda_2)}\frac{d\alpha(\Lambda)}{\alpha^2(\Lambda)} = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} d\ln(\Lambda)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\alpha(\Lambda_2)} - \frac{1}{\alpha(\Lambda_1)}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\Lambda_2) = \frac{\alpha(\Lambda_1)}{1+\alpha(\Lambda_1)\ln(\Lambda_2/\Lambda_1)}$$