

Informe Unidad 1

Espectroscopía de resonancia ultrasónica

Curso: FI4003-1 Física Experimental II
Integrantes: José López Manríquez
Felipe Cubillos P.
Profesor: Nicolás Mujica F.
Afilación: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,
Universidad de Chile.
Fecha de entrega: 26 de diciembre de 2024

1. Resumen

En el presente informe se explica en qué consiste la técnica experimental de espectroscopía de resonancia ultrasónica (RUS) y se analiza su aplicación en el estudio de una muestra de aluminio al 99 % de pureza, obteniendo sus frecuencias de resonancias y utilizándolas para calcular las constantes elásticas de la muestra mediante un código libre. A partir de dichas constantes se obtienen finalmente valores para el módulo de Young y coeficiente de Poisson de la muestra.

2. Introducción

Ante las dificultades de la resolución analítica de las ecuaciones de movimiento para las deformaciones de un sólido, se han implementado diversos métodos experimentales y numéricos basados en el estudio de la propagación de ondas en dichos sistemas. El más prominente, debido a sus ventajas sobre sus predecesores, corresponde al método de **espectroscopía de resonancia ultrasónica** (*RUS*, por sus siglas en inglés).

Mientras que la gran mayoría de los métodos experimentales anteriores a *RUS* para el análisis de deformaciones en sólidos se centran en la aproximación de ondas planas (siendo en general procedimientos complejos y tediosos que además requieren ‘quebrar’ la muestra para analizarla), la espectroscopía de resonancia ultrasónica no impone restricciones para el tipo de onda a estudiar, además de presentar amplias ventajas comparativas: reduce la cantidad de material necesario para conseguir precisión, las propiedades elásticas pueden caracterizarse por un único espectro y una única muestra, el tiempo de preparación del montaje se ve considerablemente reducido, su precisión y eficacia son mucho mayores y permite estudiar una gran cantidad de formas y materiales con cualquier simetría cristalográfica.

3. Marco Teórico

3.1. Fundamentos analíticos

Los sólidos suelen considerarse medios continuos por lo que se pueden estudiar mediante la teoría de la elasticidad. Esta proporciona información sobre el comportamiento del sistema ante deformaciones debido a esfuerzos externos.

Se define el vector desplazamiento $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}' - \vec{x}$ como aquel que conecta la posición previa de un punto material del sólido \vec{x} con la posición del mismo punto posterior a la deformación \vec{x}' . Ambos puntos son medidos desde un sistema de referencia inercial respecto al sólido.

Este vector permite la definición del **tensor de deformaciones** u_{ij} , donde los índices refieren a las dimensiones espaciales usuales, es decir, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

Cabe destacar que esta expresión corresponde a la aproximación para pequeñas deformaciones, supuesto que se basa en la utilidad de despreciar términos de segundo orden, lo cual permite aplicar la ley de Hooke. Los elementos de la diagonal son una medida de la extensión por unidad de longitud

del eje i -ésimo, mientras que los elementos fuera de la diagonal son una medida de las variaciones angulares entre los ejes i y j . Además, la traza del tensor corresponde al cambio neto en el volumen.

Las fuerzas relacionadas con la deformación se pueden expresar mediante el **tensor de estrés** σ_{ij} , que para el régimen de elasticidad lineal (y utilizando la notación de Einstein) viene dado por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{kl} \quad (2)$$

El **tensor de constantes elásticas** C_{ijkl} contiene la información de las propiedades elásticas del sistema. Las componentes de σ_{ij} son una medida de la i -ésima componente de la fuerza deformadora actuando por unidad de área con eje normal coincidente con el j -ésimo eje unitario del sistema inercial.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen tomando un segmento infinitesimal de volumen cúbico, dV y analizando las fuerzas que actúan en él. Despreciando fuerzas internas, la fuerza neta corresponde a la ejercida por las diferentes componentes en cada una de las caras del cubo. La segunda ley de Newton para las deformaciones se escribe como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) se tiene:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4)$$

La complejidad asociada a resolver la ecuación (4) motiva la aplicación de métodos experimentales para definir la propagación de ondas elásticas en el sólido bajo estudio y, consecuentemente, sus propiedades elásticas.

Algunas cantidades fundamentales en el estudio de elasticidad lineal corresponden a los **parámetros de Lamé** $\{\lambda, \mu\}$, el **módulo de Young** E (caracteriza la elasticidad longitudinal del material) y el **coeficiente de Poisson** ν (cuociente entre el acortamiento transversal y el alargamiento longitudinal). Estos provienen de las relaciones termodinámicas del material asociadas a la energía libre de Helmholtz. Dos de las ecuaciones que relacionan estos parámetros vienen dadas por:

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad \mu = \frac{E}{2(\nu+1)} \quad (5)$$

En el caso de un **material isotrópico y homogéneo**, se obtienen las siguientes relaciones simplificadas entre los parámetros de Lamé y las componentes contraídas del tensor de constantes elásticas:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \quad C_{44} = \mu \quad (6)$$

3.2. Método de *RUS*

La espectroscopía de resonancia ultrasónica se basa en la medición de las frecuencias propias de vibración de muestras con formas bien definidas; por lo general paralelepípedos y esferas. Estas frecuencias propias o de resonancia dependen de las constantes elásticas, la forma y densidad de la muestra y de su orientación con respecto al eje cristalográfico, por lo que midiendo un gran número de frecuencias resonantes es posible obtener información sobre todas estas cantidades. Por lo general, la forma, la orientación cristalográfica y la densidad de la muestra se conocen y con ellas se determina la matriz constante elástica completa de dicho espectro.

En el caso ideal, la forma de la muestra se conoce perfectamente, no hay fuerzas externas actuando sobre ella y los métodos utilizados para excitar y detectar las resonancias no afectan las frecuencias medidas. En la práctica, estas condiciones ideales pueden aproximarse lo suficiente tal que las mediciones de constantes elásticas tengan una precisión absoluta excepcionalmente alta.

Un análisis completo del error introducido por una desviación de la forma supuesta es difícil y no se dispone de una fórmula simple para estimar dicho error. Sin embargo, las precisiones absolutas para las constantes elásticas varían desde un 3% para los módulos fuera de la diagonal, hasta un 0.02% aproximadamente para algunos de los módulos de corte puro¹.

4. Montaje experimental

Para este experimento, la muestra a analizar corresponde a un paralelepípedo de aluminio al 99% de pureza, cuyas dimensiones y propiedades físicas se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Dimensiones y propiedades de la muestra

Alto d_1 cm	Ancho d_2 cm	Largo d_3 cm	Masa m g	Densidad ρ g/cm^3
1.0015 ± 0.0001	1.701 ± 0.001	4.902 ± 0.001	22.45 ± 0.01	2.688 ± 0.002

La muestra se sostiene ligeramente entre dos transductores piezoeléctricos y se excita en un punto dado por uno de los transductores. La frecuencia de este transductor de activación se barre a través de un rango correspondiente a un gran número de modos propios de vibración de la muestra. Luego, la respuesta resonante de la muestra es detectada por el transductor opuesto.

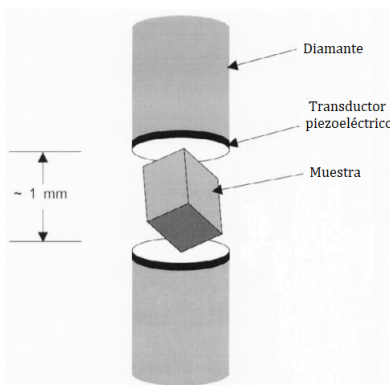


Figura 1: Esquema de una disposición experimental típica para el método RUS.
R. G. Leisure & F. A. Willis, J. Phys.: Condens. Matter 9 (1997)

El transductor piezoeléctrico opuesto entrega valores para la amplitud del voltaje inducido en el transductor producto de las vibraciones de la muestra (efecto piezoeléctrico). Graficando esta amplitud de voltaje en función de la frecuencia de barrido del transductor de activación, se observan máximos de amplitud cuando la frecuencia del transductor de activación corresponde a una de las

¹ A. Migliori *et al.*, Physica B183, 1-24 (1993)

frecuencias de resonancia de la muestra. Estos máximos se marcan manualmente a partir de los gráficos y se guarda la frecuencia de vibración asociada. Con ello, se determinan las frecuencias de resonancia de la muestra.

Usando los códigos directo e inverso² se pueden calcular las constantes elásticas C_{11} y C_{44} en función de las frecuencias de resonancia, y con ellas obtener el módulo de Young y el coeficiente de Poisson de la muestra mediante la ecuaciones (5) y (6).

5. Resultados

En la Tabla 2 se presentan 30 frecuencias de resonancia promedio obtenidas para la muestra, las cuales se obtuvieron analizando datos de 10 posicionamientos iguales del paralelepípedo, de tal forma de eliminar posibles errores en las mediciones debido a cómo se ubicó la muestra entre los transductores (el método de RUS es altamente sensible al posicionamiento de la muestra).

Tabla 2: Frecuencias de resonancia de la muestra

	f_{res} promedio MHz		f_{res} promedio MHz
f_1	0.019270 ± 0.000009	f_{16}	0.114498 ± 0.000005
f_2	0.026505 ± 0.000001	f_{17}	0.121341 ± 0.000004
f_3	0.027737 ± 0.000007	f_{18}	0.121747 ± 0.000005
f_4	0.044605 ± 0.000004	f_{19}	0.123725 ± 0.000005
f_5	0.050602 ± 0.000003	f_{20}	0.125770 ± 0.000006
f_6	0.052203 ± 0.000006	f_{21}	0.129308 ± 0.000009
f_7	0.056190 ± 0.000004	f_{22}	0.129407 ± 0.000003
f_8	0.074021 ± 0.000004	f_{23}	0.129815 ± 0.000006
f_9	0.077738 ± 0.000005	f_{24}	0.136933 ± 0.000005
f_{10}	0.085785 ± 0.000004	f_{25}	0.139091 ± 0.000005
f_{11}	0.097390 ± 0.000004	f_{26}	0.140651 ± 0.000007
f_{12}	0.098057 ± 0.000004	f_{27}	0.146325 ± 0.000005
f_{13}	0.101927 ± 0.000007	f_{28}	0.149688 ± 0.000006
f_{14}	0.102881 ± 0.000005	f_{29}	0.149944 ± 0.000005
f_{15}	0.108179 ± 0.000004	f_{30}	0.150903 ± 0.000006

A partir de estas frecuencias, con el código inverso se obtienen las constantes elásticas C_{11} y C_{44} del aluminio, las que se muestran en la Tabla 3 junto con sus predicciones teóricas a partir de los valores reales de E y ν :

Tabla 3: Constantes elásticas de la muestra

	Constante elástica C_{11} GPa	Constante elástica C_{44} GPa
Valor experimental	97.96 ± 0.97	26.57 ± 0.26
Valor teórico	107.74	26.12

² National High Magnetic Field Laboratory

Reemplazando C_{11} y C_{44} en la ecuación (6), se obtiene el valor de los parámetros de Lamé:

$$\lambda = C_{11} - 2C_{44} \quad \mu = C_{44} \quad (7)$$

Finalmente, reemplazando estos parámetros en la ecuación (5) se puede despejar el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν en función de las constantes elásticas C_{11} y C_{44} :

$$E = C_{44} \left(\frac{3C_{11} - 4C_{44}}{C_{11} - C_{44}} \right) \quad \nu = \frac{C_{11} - 2C_{44}}{2(C_{11} - C_{44})} \quad (8)$$

Los valores calculados para E y ν al reemplazar las constantes elásticas de la Tabla 3 en la ecuación (8) se muestran en la Tabla 4:

Tabla 4: Módulo de Young y coeficiente de Poisson de la muestra

	Módulo de Young E GPa	Coficiente de Poisson ν
Valor experimental	69.82 ± 1.90	0.314 ± 0.008
Valor teórico	70.00	0.330

6. Análisis de resultados

De la **Tabla 2** se hace evidente la precisión del método para obtener las frecuencias de resonancia del material, cuyo error relativo porcentual es, dentro de todo el espectro, menor al 1%. Esto pese a que el ajuste de las frecuencias de resonancia a partir de graficar los espectros espaciales del material se realiza marcando manualmente los máximos.

Por otro lado, de la **Tabla 3** se aprecia que las constantes elásticas obtenidas para la muestra presentan errores porcentuales de un 9% para C_{11} y un 1.7% para C_{44} . Estos errores porcentuales pueden parecer grandes en una primera instancia, sin embargo, de la **Tabla 4** se puede notar que dichos errores se traducen en errores porcentuales muy bajos: del 0.2% para el módulo de Young y un 4% para el coeficiente de Poisson, que son las cantidades que realmente nos interesan.

En base a lo anterior y como se aprecia en la Tabla 2, se observa que basta con un número pequeño de frecuencias de resonancia para obtener gran precisión en los parámetros de elasticidad del material.

7. Conclusiones

Se puede concluir que RUS comprende un método con gran precisión y muy óptimo en amplios sentidos. Debido a que para C_{11} el valor medido experimentalmente presentó una mayor diferencia respecto al valor esperado de forma teórica en comparación a los demás parámetros, es posible concluir que los modos de resonancia que están más relacionados con deformaciones tipo cizalle son mejor determinados por RUS o que, por otro lado, las frecuencias medidas dependen más fuertemente de esta constante elástica (cizalle), aportando información más precisa para determinar esta cantidad.

Además, se puede concluir que el método presenta una fuerte sensibilidad al posicionamiento de la muestra, así como también el código es bastante sensible a los parámetros entregados y las unidades utilizadas en los mismos. Aun así, se rescata la inmediatez de la respuesta del código, el cual corre en cuestión de segundos para este caso de una muestra homogénea e isotrópica.

Finalmente, se puede decir que RUS constituye una poderosa herramienta para determinar de forma sencilla y rápida las propiedades elásticas de una muestra isótropa ya que, como se aprecia en la Tabla 2, basta con un número pequeño de frecuencias de resonancia para obtener gran precisión, además de la simplicidad del montaje experimental.

8. Referencias

1. A. Migliori *et al.*, *Resonant ultrasound spectroscopic techniques for measurement of the elastic moduli of solids*, Physica B183, 1-24 (1993).
 2. National High Magnetic Field Laboratory, *Código RUS*.
<https://www.dropbox.com/sh/0u97rex0hveffb9/AABTx9xPDIM9om3lOvnJh8da?dl=0>
 3. J. Maynard, *Resonant Ultrasound Spectroscopy*, Physics Today (jan 1996).
 4. M. Teresa Cerda G., *Estudio sobre la densidad de dislocaciones y constantes elásticas en aluminio policristalino mediante Espectroscopía de Resonancia Ultrasónica*, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.
- a R.G. Leisure F.A. Willis, *Resonant Ultrasound Spectroscopy*, J. Phys.: Condens. Matter 9, 6001-6029 (1997).