Medición de propiedades elásticas para un paralelepípedo mediante método de espectroscopía de resonancia ultrasónica

J. López M.[1],[*] F. Cubillos P.[1],[†] and N. Mujica F.[1‡]
[1] *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.*
(Dated: December 26, 2024)

En el presente informe se explica en qué consiste la técnica experimental de espectroscopía de resonancia ultrasónica (RUS) y se analiza su aplicación en el estudio de una muestra de aluminio con forma de paralelepípedo al 99% de pureza, obteniendo sus frecuencias de resonancia dentro del rango de 0.019 - 0.15 MHz y utilizándolas para calcular sus constantes elásticas mediante un código libre [1] asumiendo isotropía y homogeneidad del material. A partir de dichas constantes se obtiene un módulo de Young $E = 69.82$ GPa y un coeficiente de Poisson $\nu = 0.314$ para la muestra, con errores de un 0.2% y 4% respectivamente.

INTRODUCCIÓN

Ante las dificultades de la resolución analítica de las ecuaciones de movimiento para las deformaciones de un sólido, se han implementado diversos métodos experimentales y numéricos basados en el estudio de la propagación de ondas en dichos sistemas. El más prominente, debido a sus ventajas sobre sus predecesores, corresponde al método de **espectroscopía de resonancia ultrasónica** (*RUS*, por sus siglas en inglés).

Mientras que la gran mayoría de los métodos experimentales anteriores a *RUS* para el análisis de deformaciones en sólidos se centran en la aproximación de ondas planas (siendo en general pocedimientos complejos y tediosos que además requieren 'quebrar' la muestra para analizarla), la espectroscopía de resonancia ultrasónica no impone restricciones para el tipo de onda a estudiar, además de presentar amplias ventajas comparativas: reduce la cantidad de material necesario para conseguir precisión, las propiedades elásticas pueden caracterizarse por un único espectro y una única muestra, el tiempo de preparación del montaje se ve considerablemente reducido, su precisión y eficacia son mucho mayores y permite estudiar una gran cantidad de formas y materiales con cualquier simetría cristalográfica.

MARCO TEÓRICO

Fundamentos analíticos

Los sólidos suelen considerarse medios continuos por lo que se pueden estudiar mediante la teoría de la elasticidad. Esta proporciona información sobre el comportamiento del sistema ante deformaciones debido a esfuerzos externos.

Se define el vector desplazamiento $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}' - \vec{x}$ como aquel que conecta la posición previa de un punto material del sólido $\vec{x}$ con la posición del mismo punto posterior a la deformación $\vec{x}'$. Ambos puntos son medidos desde un sistema de referencia inercial respecto al sólido.

Este vector permite la definición del **tensor de deformaciones** u_{ij}, donde los índices refieren a las dimensiones espaciales usuales, es decir, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

Cabe destacar que esta expresión corresponde a la aproximación para pequeñas deformaciones, supuesto que se basa en la utilidad de despreciar términos de segundo orden, lo cual permite aplicar la ley de Hooke. Los elementos de la diagonal son una medida de la extensión por unidad de longitud del eje i-ésimo, mientras que los elementos fuera de la diagonal son una medida de las variaciones angulares entre los ejes i y j. Además, la traza del tensor corresponde al cambio neto en el volumen.

Las fuerzas relacionadas con la deformación se pueden expresar mediante el **tensor de estrés** σ_{ij}, que para el regimen de elasticidad lineal (y utilizando la notación de Einstein) viene dado por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{kl} \tag{2}$$

El **tensor de constantes elásticas** C_{ijkl} contiene la información de las propiedades elásticas del sistema. Las componentes de σ_{ij} son una medida de la i-ésima componente de la fuerza deformadora actuando por unidad de área con eje normal coincidente con el j-ésimo eje unitario del sistema inercial.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen tomando un segmento infinitesimal de volumen cúbico, dV y analizando las fuerzas que actúan en él. Despreciando fuerzas internas, la fuerza neta corresponde a la ejercida por las diferentes componentes en cada una de las caras del cubo. La segunda ley de Newton para las deformaciones se escribe como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3}$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) se tiene:

$$C_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{4}$$

La complejidad asociada a resolver la ecuación (4) motiva la aplicación de métodos experimentales para definir la propagación de ondas elásticas en el sólido bajo estudio y, consecuentemente, sus propiedades elásticas.

Algunas cantidades fundamentales en el estudio de elasticidad lineal corresponden a los **parámetros de Lamé** $\{\lambda, \mu\}$, el **módulo de Young** E (caracteriza la elasticidad longitudinal del material) y el **coeficiente de Poisson** ν (cuociente entre el acortamiento transversal y el alargamiento longitudinal). Estos provienen de las relaciones termodinámicas del material asociadas a la energía libre de Helmholtz. Dos de las ecuaciones que relacionan estos parámetros se muestran en (5).

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \qquad \mu = \frac{E}{2(\nu+1)} \tag{5}$$

En el caso de un **material isotrópo** y **homogéneo**, se obtienen las siguientes relaciones simplificadas entre los parámetros de Lamé y las componentes contraidas del tensor de constantes elásticas [3]:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \qquad C_{44} = \mu \tag{6}$$

Método de RUS

La espectroscopía de resonancia ultrasónica se basa en la medición de las frecuencias propias de vibración de muestras con formas bien definidas; por lo general paralelepípedos y esferas. Estas frecuencias propias o de resonancia dependen de las constantes elásticas, la forma y densidad de la muestra y de su orientación con respecto al eje cristalográfico, por lo que midiendo un gran número de frecuencias resonantes es posible obtener información sobre todas estas cantidades. Por lo general, la forma, la orientación cristalográfica y la densidad de la muestra se conocen y con ellas se determina la matriz constante elástica completa de dicho espectro.

En el caso ideal, la forma de la muestra se conoce perfectamente, no hay fuerzas externas actuando sobre ella y los métodos utilizados para excitar y detectar las resonancias no afectan las frecuencias medidas. En la práctica, estas condiciones ideales pueden aproximarse lo suficiente tal que las mediciones de constantes elásticas tengan una precisión absoluta excepcionalmente alta.

Un análisis completo del error introducido por una desviación de la forma supuesta es difícil y no se dispone de una fórmula simple para estimar dicho error. Sin embargo, las precisiones absolutas para las constantes elásticas varían desde un 3% para los módulos fuera de la diagonal, hasta un 0.02% aproximadamente para algunos de los módulos de corte puro [2].

Alto d_1 cm	1.0015 ± 0.0001
Ancho d_2 cm	1.701 ± 0.001
Largo d_3 cm	4.902 ± 0.001
Masa m g	22.45 ± 0.01
Densidad ρ g/cm^3	2.688 ± 0.002

TABLE I. Dimensiones y propiedades de la muestra, la cual corresponde a un paralelepípedo de aluminio al 99% de pureza.

MONTAJE EXPERIMENTAL

Para este experimento, la muestra a analizar corresponde a un paralelepípedo de aluminio al 99% de pureza cuyas dimensiones y propiedades se muestran en la Tabla I. La muestra se sostiene ligeramente entre dos transductores piezoeléctricos y se excita en un punto dado por uno de los transductores (Ver Fig.1). La frecuencia de este transductor de activación se barre a través de un rango dado que incluya un gran número de modos propios de vibración de la muestra. Luego, la respuesta resonante de la muestra es detectada por el transductor de recepción.

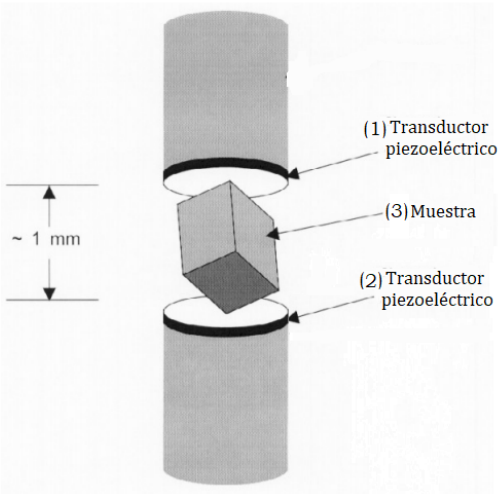


FIG. 1. Disposición experimental usual para el método de RUS: (1) Transductor piezoeléctrico de activación, (2) Transductor piezoeléctrico de recepción, (3) Muestra. [4]

El transductor piezoeléctrico opuesto entrega valores para la amplitud del voltaje inducido en el transductor producto de las vibraciones de la muestra (efecto piezoeléctrico). Graficando esta amplitud de voltaje en función de la frecuencia de barrido del transductor de activación, se observan máximos de amplitud cuando la

	C_{11} [GPa]	C_{44} [GPa]
1	98.3805 ± 0.0868	26.5893 ± 0.0179
2	98.0934 ± 0.0895	26.5767 ± 0.0174
3	97.3338 ± 0.0966	26.5637 ± 0.0169
4	97.7221 ± 0.0930	26.5659 ± 0.0170
5	98.1594 ± 0.0889	26.5815 ± 0.0176
6	98.2679 ± 0.0879	26.5879 ± 0.0179
7	97.9110 ± 0.0912	26.5698 ± 0.0172
8	97.7322 ± 0.0928	26.5514 ± 0.0165
9	97.8364 ± 0.0919	26.5474 ± 0.0163
10	98.2416 ± 0.0881	26.5778 ± 0.0175

TABLE II. Constantes elásticas C_{11} y C_{44} calculadas a partir de las frecuencias obtenidas con el código inverso [1].

frecuencia del transductor de activación corresponde a una de las frecuencias de resonancia de la muestra. Estos máximos se marcan manualmente a partir de los gráficos y se guarda la frecuencia de vibración asociada. Con ello, se determinan las frecuencias de resonancia de la muestra. Finalmente, mediante los códigos directo e inverso[1] se pueden calcular las constantes elásticas C_{11} y C_{44} en función de las frecuencias de resonancia, y con ellas obtener el módulo de Young y el coeficiente de Poisson de la muestra mediante las ecuaciones (5) y (6).

RESULTADOS

Se analizaron datos de 10 posicionamientos iguales del paralelepípedo con el objetivo de eliminar posibles errores en las mediciones debido a cómo se ubicó la muestra entre los tranductores (el método de RUS es altamente sensible al posicionamiento inicial). Para cada posicionamiento x_i de la muestra se midió un conjunto de 30 frecuencias de resonancia entre 0.019 - 0.15 MHz, con las cuales se calcularon los valores de las constantes elásticas C_{11} y C_{44} asociadas a x_i mediante el código inverso[1], como se muestra en la Tabla II. Teniendo las constantes elásticas para cada posicionamiento, se obtuvo su valor promedio y se compararon con su predicción teórica (Ver Tab.III) a partir de los valores reales de E y ν.

Reemplazando C_{11} y C_{44} en la ecuación (6), se obtiene el valor de los parámetros de Lamé:

$$\lambda = C_{11} - 2C_{44} \qquad \mu = C_{44} \tag{7}$$

Finalmente, reemplazando estos parámetros en la ecuación (5) se puede despejar el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν en función de las constantes elásticas C_{11} y C_{44}:

$$E = C_{44}\left(\frac{3C_{11} - 4C_{44}}{C_{11} - C_{44}}\right) \qquad \nu = \frac{C_{11} - 2C_{44}}{2(C_{11} - C_{44})} \tag{8}$$

	Valor experimental promedio	Valor teórico
Cte. elástica C_{11} GPa	97.96 ± 0.97	107.74
Cte. elástica C_{44} GPa	26.57 ± 0.26	26.12

TABLE III. Constantes elásticas C_{11} y C_{44} obtenidas con el código inverso [1] para un paralelepípedo de aluminio al 99% de pureza, en base a las mediciones de las frecuencias de resonancia con el método de RUS.

	Módulo de Young E GPa	Coef. de Poisson ν
Valor experimental	69.82 ± 1.90	0.314 ± 0.008
Valor teórico	70.00	0.330

TABLE IV. Módulo de Young y coeficiente de Poisson obtenidos mediante el método de RUS para un paralelepípedo al 99% de aluminio puro, comparados con sus valores teóricos[5].

Reemplazando los valores obtenidos para las constantes elásticas C_{11} y C_{44} en la ecuación (8), se calculan finalmente los valores para E y ν (Ver Tab.IV).

ANÁLISIS DE RESULTADOS

De los datos de la Tabla II se evidencia la precisión del método de RUS para obtener las frecuencias de resonancia del material, cuyo error relativo porcentual es, dentro de todo el espectro, menor al 1%. Esto pese a que el ajuste de las frecuencias de resonancia a partir de graficar los espectros espaciales del material se realiza marcando manualmente los máximos.

Por otro lado, de la Tabla III se aprecia que las constantes elásticas obtenidas para la muestra presentan errores porcentuales de un 9% para C_{11} y un 1.7% para C_{44}. Estos errores porcentuales pueden parecer grandes en una primera instancia, sin embargo, de la Tabla IV se puede notar que dichos errores se traducen en errores porcentuales muy bajos: del 0.2% para el módulo de Young y un 4.8% para el coeficiente de Poisson, que son las cantidades de real interés.

CONCLUSIONES

Finalmente, se puede concluir que RUS comprende un método con gran precisión y muy óptimo. Esto no se refleja directamente en el valor medido para C_{11} experimentalmente, ya que este presentó una mayor diferencia respecto al valor esperado de forma teórica en comparación a los demás parámetros. A partir de lo anterior, es posible concluir que los modos de resonancia que están más relacionados con deformaciones tipo cizalle son mejor determinados por RUS o que, por otro lado, las frecuencias medidas dependen más fuertemente de esta constante elástica (cizalle), aportando información más precisa para determinar esta cantidad.

Además, se puede concluir que el método presenta una fuerte sensibilidad al posicionamiento de la muestra, así como también el código es bastante sensible a los parámetros entregados y las unidades utilizadas en los mismos. Aun así, se rescata la inmediatez de la respuesta del código, el cual corre en cuestión de segundos para este caso (muestra homogénea e isótropa).

Finalmente, se puede decir que RUS constituye una poderosa herramienta para determinar de forma sencilla y rápida las propiedades elásticas de una muestra isótropa ya que, como se aprecia en la Tabla II, basta con un número pequeño de frecuencias de resonancia para obtener gran precisión, además de la simplicidad del montaje experimental.

* joseee.lpz@gmail.com
† felipecubillos.irfe@gmail.com
‡ nmujica@dfi.uchile.cl

[1] National High Magnetic Field Laboratory. Codigo directo e inverso para la obtención de las constantes elásticas a partir de frecuencias de resonancias. https://bit.ly/3mCb6du
[2] Migliori A. *et al.*, Physica **B183**, 1-24 (1993)
[3] Teresa Cerda G. Estudio sobre la densidad de dislocaciones y constantes elásticas en aluminio policristalino mediante Espectroscopía de Resonancia Ultrasónica.
[4] R.G. Leisure F.A. Willis. Resonant Ultrasound Spectroscopy. J. Phys.: Condens. Matter **9**, 6001-6029 (1997).
[5] R. Talebitooti, M.R. Zarastvand and H.D. Gohari. Journal of Vibration and Control **24**(19)