Parte 8: Variables de Estado

Prof. Doris Sáez H.

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

Controlabilidad:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

Definición: "Un sistema discreto es totalmente controlable si existe u(k) definido sobre un número finito de muestras tal que dada cualquier condición inicial el estado x(k) puede llegar a un estado deseado x_f en n periodos de muestreo"

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

La solución del sistema discreto es:

$$x(n) = G^n x(0) + G^{n-1}Hu(0) + G^{n-2}Hu(1) + ... + Hu(n-1)$$

$$x(n) - G^n x(0) = \begin{bmatrix} H & GH & .... & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ . \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Matriz de controlabilidad: $\begin{bmatrix} H & GH & .... & G^{n-1}H \end{bmatrix}$

Debe ser invertible para que el sistema sea controlable.

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

Observabilidad:

$$x(k+1) = Gx(K) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Solución:

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)$$

$$y(k) = CG^k x(0) + \sum CG^{k-j-1} Hu(j) + Du(k)$$

G, H, C, D y u(k) son conocidos.

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

"Un sistema discreto es observable si dado y(k) sobre un número finito de muestras es posible determinar el estado inicial x(0)"

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

$$x(K) = G^K x(0)$$
$$y(K) = CG^K x(0)$$
$$y(0) = Cx(0)$$
$$y(1) = CGx(0)$$
$$\vdots$$
$$y(n-1) = CG^{n-1} x(0)$$

Matriz de observabilidad: $\begin{bmatrix} C \\ CG \\ . \\ . \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$

Esta matriz debe ser invertible o rango n para que el sistema sea observable.

Forma Canónica Controlable

$$G(Z) = \frac{b_0 Z^n + b_1 Z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} Z + b_n}{Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} Z + a_n}$$

Ecuación característica:

$$\det(ZI - A) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots. + a_{n-1} Z + a_n = 0$$
$$\overline{x}(k+1) = \overline{A}\overline{x}(k) + \overline{B}u$$
$$y(k) = \overline{C}\overline{x}(k) + \overline{D}u$$

Forma Canónica Controlable

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & : \\ : & : & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots. & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots. & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \ldots.. & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D} = D$$

Forma Canónica Observable

$$G(Z) = \frac{b_0 Z^n + b_1 Z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} Z + b_n}{Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} Z + a_n}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots. & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & : & : \\ : & & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \ldots. & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ : \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots. & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{D} = D$$