PAUTA EJ#3

a) Continuidad: $\dfrac{d\forall}{dt} = \cancel{Q_e}^{\,0} - Q_s \Leftrightarrow A \cdot \dfrac{dh}{dt} = -am\sqrt{2gh} \Leftrightarrow \dfrac{A\,dh}{\sqrt{h}} = -am\sqrt{2g}\cdot dt$ (0,5)

$$A\int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = -am\sqrt{2g}\int_0^t dt \Leftrightarrow A\left[2\sqrt{h}\right]_H^h = -am\sqrt{2g}\,[t]_0^t \Leftrightarrow 2A\left(h^{1/2} - H^{1/2}\right) = -am\sqrt{2g}\,t$$

$$\Rightarrow h = \left[\sqrt{H} - \frac{am\sqrt{2g}}{2A}t\right]^2 \text{ (1,0)} ;\quad Q = am\sqrt{2gh} \Rightarrow Q = am\sqrt{2g}\left[\sqrt{H} - \frac{am\sqrt{2g}}{2A}t\right] \text{ (1,0)}$$

b) Cuando el estanque se vacíe, se tendrá $h=0 \Rightarrow \sqrt{H} = \dfrac{am\sqrt{2g}}{2A}t$

$$\Rightarrow t = \frac{2A\sqrt{H}}{am\sqrt{2g}} \text{ (1,0)} = \frac{2\cdot 180\cdot\sqrt{10}}{0{,}01\cdot 0{,}6\sqrt{2\cdot 9{,}8}} = 42.857\,[s] \sim 11{,}9\,[hr] \text{ (0,5)}$$

c) Primero hay que calcular el volumen de bencina que se pierde desde $t=0$ hasta $t=t_0$

$$\frac{d\forall}{dt} = Q \Leftrightarrow d\forall = Q\,dt \Leftrightarrow \int_0^{\forall_0} d\forall = \int_0^{t_0} Q\,dt \Leftrightarrow \forall_0 = \int_0^{t_0} am\sqrt{2g}\left[\sqrt{H} - \frac{am\sqrt{2g}}{2A}t\right]dt$$

$$\Rightarrow \forall_0 = am\sqrt{2gH}\int_0^{t_0} dt - \frac{a^2m^2g}{A}\int_0^{t_0} t\,dt = am\sqrt{2gH}\,t_0 - \frac{a^2m^2g}{A}\frac{t_0^2}{2} = 0.01\cdot 0.6\cdot\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 10}\cdot 3600 - \frac{0{,}01^2\cdot 0{,}6^2\cdot 9{,}8\cdot 3600^2}{180\cdot 2} = 277\,[m^3]$$ (0,8)

En el instante t_0, el volumen que queda en el estanque es: $\forall^* = AH - \forall_0$, y la altura de bencina en el estanque es $h_0 = \dfrac{\forall^*}{A} = H - \dfrac{\forall_0}{A} = 10 - \dfrac{277}{180} = 8{,}46\,[m]$ (0,2)

Continuidad: $A\dfrac{dh}{dt} = -am\sqrt{2gh} - bm\sqrt{2gh} \Leftrightarrow A\dfrac{dh}{dt} = -m\sqrt{2gh}\,(a+b) \Leftrightarrow A\dfrac{dh}{\sqrt{h}} = -m\sqrt{2g}\,(a+b)\,dt$

Del mismo modo que antes, se llega a: $Q' = (a+b)m\sqrt{2g}\left[\sqrt{h_0} - \dfrac{(a+b)\sqrt{2g}}{2A}t\right]$

En este caso, el tpo. de vaciado, del volumen $\forall^*$, será: $t^* = \dfrac{2A\sqrt{h_0}}{(a+b)m\sqrt{2g}} = \dfrac{2\cdot 180\cdot\sqrt{8{,}46}}{(0{,}01+0{,}07)\cdot 0{,}6\sqrt{2\cdot 9{,}8}} \doteq 4.927\,[s]$ (0,3)

Y el volumen que se perderá será $\forall_0' = \displaystyle\int_0^{t^*} Q'\,dt = am\sqrt{2gh_0}\,t^* - \frac{a(a+b)m^2g\,t^{*2}}{2A}$ (0,3)
(sólo lo que sale por el orificio)

$\Rightarrow V_{pérdida} = \forall_0 + \forall_0' = am\sqrt{2g}\left(t_0\sqrt{H} + t^*\sqrt{h_0}\right) - \dfrac{am^2g}{2A}\left(at_0^2 + (a+b)t^{*2}\right)$

$\Rightarrow \forall_{pérdida} = 0{,}01 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8}\left(3.600\sqrt{10} + 4.927 \cdot \sqrt{8{,}46}\right) - \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}6^2 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 180}\left(0{,}01 \cdot 3.600^2 + 0{,}08 \cdot 4.927^2\right) = 480\ [m^3]$ (0,4)

d) Como ya vimos, el tpo. de vaciado del estanque es de $t^* = 4.927\ [s] < t_1 + t_0$ (tpo. en que empieza a llegar el aporte del segundo estanque siniestrado

$\Rightarrow$ En $t = t_1 + t_0$, el volumen del estanque de emergencia es: $\forall_{TOTAL} - \forall_{PÉRDIDA} = HA - 480 = 1.320\ [m^3]$

$\Rightarrow$ Quedan sólo $480\ [m^3]$ disponibles ($\forall_2$)

$\Rightarrow$ Hay que calcular cuánto tiempo se demora el segundo estanque en evacuar $\forall_2$

$$\frac{d\forall_2}{dt} = Q_2 \Leftrightarrow \forall_2 = \int_0^{t_2} Q_2\, dt = bm\sqrt{2gh_0}\, t_2 - \frac{b(a+b)m^2 g t_2^2}{2A} = 0{,}07 \cdot 0{,}6\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 8{,}46}\, t_2 - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}6^2 \cdot 9{,}8\, t_2^2}{2 \cdot 180}$$

$$\Leftrightarrow 480 = 0{,}54 t_2 - 0{,}0000549 t_2^2 \ ; \ t_2 = \frac{0{,}54 \pm \sqrt{0{,}54^2 - 4 \cdot 480 \cdot 0{,}0000549}}{2 \cdot 0{,}0000549} = 988\ [s]$$

Por lo tanto, el estanque comienza a rebalsar en $T = t_1 + t_0 + t_2 = 7.200 + 3.600 + 988 = 11.788\ [s]$