P2| a) Entre la tubería y el cilindro interno:

$$dT = r\,dF = r\,\tau\,dA \qquad \tau = \mu_1 r \frac{d\omega}{dr}$$

$$dA = H\,r\,d\theta$$

$$dT = \mu r^3 H \frac{d\omega}{dr} d\theta$$

$$\int_0^{T_1} dT = \int_0^{2\pi} \mu_1 r^3 H \frac{d\omega}{dr} \Rightarrow T_1 = 2\pi\mu_1 r^3 H \frac{d\omega}{dr}$$

$$\int_{R_1}^{R} T_1 \frac{dr}{r^3} = \int_0^{\omega} 2\pi\mu_1 H\,d\omega$$

$$-\frac{T_1}{2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) = 2\pi\mu_1 H\omega$$

$$T_1 = \frac{4\pi\mu_1 H\omega}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}}$$

Entre la tubería y el cilindro externo:

$$T_2 = 2\pi\mu_2 r^3 H \frac{d\omega}{dr}$$ hasta ahí, análogo a lo anterior

$$\int_{R+E}^{R_2} T_2 \frac{dr}{r^3} = \int_{\omega}^{0} 2\pi\mu_2 H\,d\omega$$

$$-\frac{T_2}{2}\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{(R+E)^2}\right) = -2\pi\mu_2 H\omega$$

$$T_2 = \frac{4\pi\mu_2 H\omega}{\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{(R+E)^2}} \quad < 0$$

Por la forma como se consideran los torques, el segundo aparece con signo opuesto, pero debe usarse el mismo signo para ambos ya que son ambas componentes resistivas al movimiento.

$$\Rightarrow T = \frac{4\pi\mu_1 H\omega}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}} + \frac{4\pi\mu_2 H\omega}{\frac{1}{(R+E)^2} - \frac{1}{R_2^2}}$$

b) $$T_{ext} - T_{resis} = I\frac{d\omega}{dt}$$

T_{ext}: torque motriz; T_{resis}: resistencia (viscosidad)

para este caso, Text será nulo, ya que analizaremos que pasa cuando se deja de impulsar.

$$T_{resis} = 4\pi H\left[\frac{\mu_1}{\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R^2}} + \frac{\mu_2}{\frac{1}{(R+E)^2}-\frac{1}{R_2^2}}\right]\omega = \alpha\cdot\omega$$

$$\Rightarrow -\alpha\omega = I\frac{d\omega}{dt}$$ ec. diferencial, cond. de borde $\omega=\omega_0$ para $t=0$

$$-\int_0^t \alpha\, dt = \int_{\omega_0}^{\omega} I\frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow -\alpha t = I\ln\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega}$$

$$\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{I}t$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{I}t}}$$

Recordar que el momento de inercia de un cilindro hueco es

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_{ext}^2 + R_{int}^2\right) \qquad \text{con } M = m\cdot H$$

en este caso $R_{ext} = R+E$; $R_{int} = R$

$$I = \frac{1}{2}mH\left(R^2+2RE+E^2+R^2\right)$$

$$I = mH\left(R^2+RE+\frac{E^2}{2}\right)$$