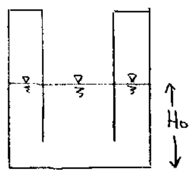
Pauta Control #1
CI31A - Mecánica de Fluidos

P1)



$$\text{Volumen líquido} = A \cdot H_0 = \pi R_2^2 \cdot H_0$$
$$\text{Volumen gas encerrado} = \pi (R_2^2 - R_1^2)(H - H_0) = V_0$$

Por una parte se tiene que se trata de un gas ideal, por lo que

$$P_0 \cdot V_0 = P_f \cdot V_f \qquad (1)$$
$$P_f = P_{atm} \cdot \frac{(H - H_0)}{(H - H_1')}$$

$$P_0 = P_{atm}$$
$$V_f = (H - H_1') \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

donde H_1' corresponde a la altura a calcular de fluido entre cilindros

Además, por conservación de volumen de fluido:

$$\pi R_2^2 H_0 = \pi R_1^2 \cdot H_1 + \pi (R_2^2 - R_1^2) H_1'$$

H_1: altura a calcular de fluido en el cilindro central

$$\Rightarrow H_1 = H_0 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - H_1' \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right] \qquad (2)$$

Por equilibrio hidroestático:

$$P_{atm} + \rho g H_1 = P_f + \rho g H_1' \qquad (3)$$

Introduciendo (1) y (2) en (3):

$$P_{atm} + \rho g \left\{ H_0 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - H_1' \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]\right\} = P_{atm} \cdot \frac{(H - H_0)}{(H - H_1')} + \rho g H_1'$$

Reordenando:

$$\left[-\rho g \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right] H_1'^2 + \left[\rho g \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 (H_0 + H) + P_{atm}\right] H_1' + \left[-P_{atm} H_0 - \rho g H_0 H \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right] = 0$$

$$-14112 H_1'^2 + 125315 H_1' - 80806 = 0$$

$$\Rightarrow H_1' = \begin{cases} 0{,}70 & (a) \\ 8{,}18 & (b) \end{cases}$$

Como la solución (b) no tiene sentido físico, la respuesta es $H_1' = 0{,}70$, lo que implica que el sistema no experimenta cambio de volumen de aire, en un proceso isotérmico.
Lo que sucede con el calor extraído entonces, es que el sistema, al no ser adiabático, recupera este calor intercambiando con el ambiente

b) $\vec{f_m} = \frac{1}{\rho} \nabla p$

$\vec{f_m} = \begin{cases} -g\,\hat{k} \\ \omega^2 r\,\hat{r} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad$ (independiente de θ)

$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz$

$dp = \rho \omega^2 r\, dr - \rho g\, dz$

cilindro central: en $r = 0$, $z = z_m$, $p = p_{atm}$

(z_m desconocido)

$$p - p_{atm} = \rho \frac{\omega^2}{2} r^2 - \rho g (z - z_m)$$

superficie libre ($p = p_{atm}$): $\rho \frac{\omega^2}{2} r^2 = \rho g (z - z_m)$

$$\boxed{z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_m}$$

entre cilindros: en $r = R_2$, $z = z_b$, $p = p_{gas}$

(z_b desconocido)

$$p - p_{gas} = \rho \frac{\omega^2}{2} (R_2^2 - r^2) - \rho g (z_b - z)$$

$$\boxed{z(r) = \frac{\omega^2 (r^2 - R_2^2)}{2g} + z_b}$$

Llamando $\forall_2$ al volumen entre cilindros y $\forall_1$ al volumen de fluido en el cilindro central

$$\forall_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_1} z(r)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_1} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_m\right) r\, dr\, d\theta$$

$$\Rightarrow \forall_1 = \pi R_1^2 \left[z_m + \frac{\omega^2 R_1^2}{4g}\right]$$

$$\forall_2 = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} z(r)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - \frac{\omega^2 R_2^2}{2g} + z_b\right) r\, dr\, d\theta$$

$$\Rightarrow \forall_2 = \pi (R_2^2 - R_1^2) \left[z_b - \frac{\omega^2}{4g}(R_2^2 - R_1^2)\right]$$

Evaluando:

$$\forall_1 = 0{,}7854\, z_m + 0{,}0124$$

$$\forall_2 = 0{,}3456\, z_b - 0{,}0024$$

Por conservación de volumen de fluido

$$\forall_0 = \pi R_2^2 \cdot H_0 = 0{,}7917\ [m^3] = \forall_1 + \forall_2$$

$$\boxed{0{,}7917 = 0{,}7854\ z_m + 0{,}3456\ z_b + 0{,}0100} \quad (4)$$

Por otra parte, el volumen de gas puede calcularse como:

$$\forall_{gas} = \pi (R_2^2 - R_1^2) \cdot H - \forall_2$$

$$= \pi (R_2^2 - R_1^2) \cdot \left[H - z_b + \frac{\omega^2}{4g} (R_2^2 - R_1^2) \right]$$

$$\boxed{\forall_{gas} = 0{,}3480 - 0{,}3456\ z_b} \quad (5)$$

El proceso que ocurre con el gas es isotérmico, luego:

$$P_{gas} \cdot \forall_{gas} = P_0 \cdot \forall_{0gas}$$

$$\Rightarrow P_{gas} = \frac{P_{atm} \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2) \cdot (H - H_0)}{\forall_{gas}}$$

Usando (5) y evaluando: $\boxed{P_{gas} = \dfrac{10505}{0{,}3480 - 0{,}3456\ z_b}}$ (6)

Finalmente, considerando equilibrio de presiones en el entorno de la pared del cilindro central:

$$P_{gas} + \rho g \cdot z(R_1^+) = P_{atm} + \rho g\, z(R_1^-)$$

$z(R_1^+)$ y $z(R_1^-)$ son las alturas de fluido a una distancia R_1 del centro del sistema, evaluadas con la superficie libre de la zona de gas encerrado y la zona expuesta a la atmósfera, respectivamente.

$$z(R_1^+) = \frac{\omega^2}{2g} (R_1^2 - R_2^2) + z_b \quad ; \quad z(R_1^-) = \frac{\omega^2}{2g} R_1^2 + z_m$$

$$P_{gas} + \rho \frac{\omega^2}{2} (\cancel{R_1^2} - R_2^2) + \rho g z_b = P_{atm} + \cancel{\frac{\rho \omega^2 R_1^2}{2}} + \rho g z_m$$

$$P_{gas} = \rho g (z_m - z_b) + P_{atm} + \frac{\rho \omega^2}{2} R_2^2$$

$$\boxed{P_{gas} = 9800\ z_m - 9800\ z_b + 101769} \quad (7)$$

Igualando (6) y (7):

$$\boxed{\frac{10505}{0{,}3480 - 0{,}3456\ z_b} = 9800\ z_m - 9800\ z_b + 101769} \quad (8)$$

Además, despejando z_m de (4):

$$\boxed{z_m = \frac{0{,}7917 - 0{,}3456\ z_b - 0{,}0100}{0{,}7854}} \quad (9)$$

Uniendo (8) y (9) se llega a una ecuación de 2^{do} grado para z_b, cuyas soluciones son:

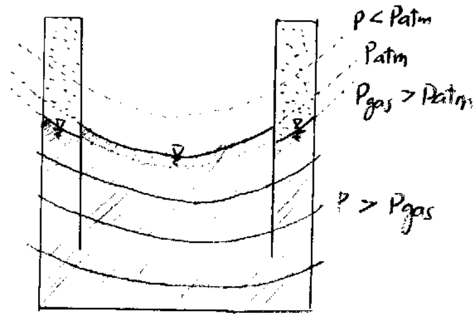
$$z_b = \begin{cases} 0{,}708 \text{ m} & (a) \\ 8{,}202 \text{ m} & (b) \end{cases}$$

La solución con sentido físico es la (a), con lo que se obtiene

$$z_b = 70{,}8 \text{ [cm]}$$

En (9): $z_m = 68{,}4$ [cm]

En (7): $P_{gas} = 101769$ [Pa] $>$ P_{atm}



Fuerza sobre el fondo:

FLUIDO: $$F_f = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_2} \rho g z(r)\, r\,dr\,d\theta$$

$$F_f = \rho g \left(\forall_1 + \forall_2 \right) = \rho g \forall_0$$

GAS: $$F_{gas} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_1} P_{atm}\, r\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} P_{gas}\, r\,dr\,d\theta$$

$$F_{gas} = \pi R_1^2 P_{atm} + \pi (R_2^2 - R_1^2) P_{gas}$$

$$F_{Total} = \rho g \forall_0 + \pi R_1^2 P_{atm} + \pi (R_2^2 - R_1^2) P_{gas}$$

caso inicial:

$$F_{TOTAL} = \rho g \forall_0 + \pi R_2^2 P_{atm} \quad < \quad F_{Total} \text{ en caso nuevo.}$$

La diferencia se produce por el aumento de presión del gas, al desplazarse líquido hacia los bordes por efectos centrífugos, disminuyendo el volumen del gas encerrado.

Peso del sistema completo $= \underbrace{(M_{gas} + M_{fluido})}_{\text{MASAS}} \cdot \vec{g}$

No experimenta cambios, ya que se conserva la masa en todo momento.